高等学校教学用书

高等数学教程

第五卷 第二分册

В. И. 斯米尔诺夫著

高等教育出版社

高等学校教学用書



高等数学教程

第五卷 第二分册

B. И. 斯米尔諾夫著
宋 正 譯



高等教育出版社

本書系根据苏联国立技术理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的、斯米尔諾夫 (В. И. Смирнов) 著"高等数学教程"(Курс высшей математики)第五卷 1947 年版譯出的。

本書(第五卷)中譯本暫分二分册出版。

高 等 数 学 教 程

第五卷 第二分册

В. И. 斯米尔諾夫著

宋 正 譯

高等教育出版社出版 北京宣武門内承恩寺7号

(北京市书刊出版业营业许可証出字第054号)

商务印书館上海厂印刷 新华书店发行

統一书号 13010·578 开本 850×1168 1/32 印张 9 10/16

字数 230,000 印数 1—16,600 定价(4) ¥ 1.10

1959年8月第1版 1959年8月上海第1次印刷

五卷第二分册目录

第四章　希勒柏特空間論

第五章 一般空間

第四章　希勒柏特空間論

§1. 有界运算子論

92. 第一組公理　研究函数空間 L_2 及序列空間 l_2 时曾發現其几何結构是全同的。它們都是同一个抽象空間的不同具体表現，本章中將論这一抽象空間。这空間是首先由希勒柏特用形式 l_2 引入的，通常叫做 H 空間或希勒柏特空間。假維数有穷时，H 空間的特例就是 n 維空間，我們在第三卷中已討論过了。在本章中我們將考察无穷維的 H 空間。在考察空間 L_2 时我們分别实空間与复空間的情形。我們將考察的抽象空間 H 是与复空間 L_2 相似的。

既然是論抽象空間，应当先以公理来描述它，而空間的一切性質將是这些公理的后果。換句話說，我們將把空間 H 看做滿足一些公理的元(矢量)的集合。元的本性可以是多样的。在空間 L_2 中，元乃是 L_2 中的函数，在空間 l_2 中則是复数的无穷数列。在下面空間元平常用字母表中后面的字母 $x, y, z, \cdots$ 等表示，而复数則用前面的字母 $a, b, c, \cdots$ 表示。現在我們陈述第一組公理。

定义　所謂复的希勒柏特空間，或称 H 空間，是指滿足下列一切公理的元的集合 H。

公理 A　H 中的元可以用复数乘，并可以相加，就是說，如果 x 及 y 是 H 中的元，而 a 是复数，則 ax 及 $x+y$ 也是 H 中的确定元。上述的运算遵守下列規則：

1. $x+y=y+x$;　　　2. $x+(y+z)=(x+y)+z$;

3. $a(x+y)=ax+ay$;　　4. $(a+b)x=ax+bx$;

5. $a(bx)=(ab)x$;　　6. $1x=x$;

7. 如果 $x+y=x+z$，則 $y=z$。

今介紹零元的概念。設 x 及 y 是 H 中任意兩元。現在証明 $0x=0y$。写成 $0x=\theta$，$0y=\theta_1$。应用規則 4 及 6，可以写成：

$$x+\theta=1x+0x=(1+0)x=1x=x,$$

而完全同样，$y+\theta_1=y$。又依規則 1 及 2，

$$(x+y)+\theta=(x+\theta)+y=x+y,$$

完全同样可証 $(x+y)+\theta_1=x+y$，由此可得：$(x+y)+\theta=(x+y)+\theta_1$，而依 7，得 $\theta=\theta_1$。如此当把任意一元乘以数 0 时所得是同一个元，叫做零元。我們用記号 θ 表示零元。不难由上面諸規則推出下列几个簡單結果。θ 乘以任意复数 a 所得的积 $a\theta$ 等于 θ。如果 $ax=\theta$ 而 $a\neq 0$，則 $x=\theta$。如果 $ax=bx$，而 $x\neq\theta$，則 $a=b$。如果 $ax=ay$ 而 $a\neq 0$，則 $x=y$。記号 $(-x)$ 是用以表示积 $(-1)\cdot x$ 的。差 $x-y$ 是由公式

$$x-y=x+(-y)$$

定义的。不难驗証，关于差，通常代数学中的規律仍适用。在下面零元将簡單地表示成 0。只要小心对待以后所写的等式，这与数 0 是不致混淆的。如果在等式中一边是 H 的元，而另一边有 0，則后者应当了解为 H 中的零元。

定义　諸元 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 叫做綫性无关的，是指等式

$$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_mx_m=0$$

只在一切复数 $c_k(k=1, 2, \cdots, m)$ 都等于零的情形才可能。

关于在第三卷中考察过的 n 維复空間，綫性无关元的最大数目是 n。現在举出排斥有穷維空間可能性的公理。

公理 B　对于任意正整数 n，空間中都含有 n 个綫性无关元。

93. 第二組公理　現在論关于数积概念的公理。

公理 C 对于 H 中每一对元 x 及 y 必有一确定的复数与它們相应,这数叫做 x 乘以 y 的数积,用記号 (x, y) 表示。这数积遵守下列規則:

8. $(y, x)=\overline{(x, y)}$; 9. 如果 $x\neq 0$, 則 $(x, x)>0$;

10. $(x'+x'', y)=(x', y)+(x'', y)$;

11. $(ax, y)=a(x, y)$。

由上述規則直接可得下列簡單的結果:

$$\left.\begin{array}{c}(x, y'+y'')=(x, y')+(x, y''); \ (x, ay)=\bar{a}(x, y); \\ \text{如果 } x=0, \text{ 那末 } (x, x)=0_{\circ}\end{array}\right\} \quad (1)$$

$\sqrt{(x, x)}$ 叫做元 x 的范数,并用 $\|x\|$ 表示:

$$\|x\|=\sqrt{(x, x)}_{\circ} \quad (2)$$

除了零元以外,任何元的范数都是正的。零元的范数則等于零。下面諸公式都是显然的:

$$\|ax\|^2=(ax, ax)=|a|^2(x, x)=|a|^2\|x\|^2,$$

就是說

$$\|ax\|=|a|\cdot\|x\|, \quad (3)$$

而此外, $\|y-x\|=\|x-y\|$。式 $\|y-x\|$ 叫做元 x 及 y 間的距离,并表示成 $\rho(x, y)$。如此則 $\|y-x\|\geqslant 0$, 而等式成立的必要且充分的条件乃是 $x=y$。再注意下面的显見公式:

$$(x, y)+(y, x)=2R(x, y), \quad (4)$$

而 R 表示实数部分。如 $(x, y)=0$, 那末依 8, (y, x) 也 $=0$, 而在这情形下两元叫做互相正交的。依 11 零元与任意元都相正交。設 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是两两正交的元。作这些元的和的范数平方,就是說:

$$\|x_1+x_2+\cdots+x_m\|^2=(x_1+x_2+\cdots+x_m, x_1+x_2+\cdots+x_m)_{\circ}$$

依 10 及(1)展开数积,并应用 x_k 的两两正交性,我們对于两两正交元組得到了下列的畢达哥拉定理:

$$\|x_1+x_2+\cdots+x_m\|^2=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\cdots+\|x_m\|^2。\qquad (5)$$

現在証明两个不等式，这与[56]中的布尼亞科夫斯基-柯西不等式相似。設 x 及 y 是 H 中任意两个元，而 a 与 b 是任意两个复数。那末

$$(ax+by,\ ax+by)=a\bar{a}(x,\ x)+a\bar{b}(x,\ y)+$$
$$+\bar{a}b(y,\ x)+b\bar{b}(y,\ y)\geqslant 0。$$

上面变数 a 与 b 的正埃尔密特式的判別式必須是正的，就是

$$(x,\ x)(y,\ y)-(x,\ y)(y,\ x)\geqslant 0,$$

而依 8，及范数的定义：

$$\|x\|^2\|y\|^2-|(x,\ y)|^2\geqslant 0,$$

由此得出布尼亞科夫斯基-舒伐尔森不等式：

$$|(x,\ y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|。\qquad (6)$$

現在考察和 $x+y$ 的范数平方：

$$\|x+y\|^2=(x+y,\ x+y)=\|x\|^2+\|y\|^2+2R(x,\ y)。$$

注意 $|R(x,\ y)|\leqslant|(x,\ y)|$，及不等式（6），可得

$$\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|,$$

由此得柯西不等式，或称三角形法则：

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|。\qquad (7)$$

設 $x,\ y,\ z$ 是 H 中的某些元。对于和 $(x-y)=(x-z)+(z-y)$ 应用三角形法則，可得下面公式，在以后常常要用到：

$$\|x-y\|\leqslant\|x-z\|+\|z-y\|。\qquad (8)$$

再注意下面一个直接由（7）得出的公式：

$$\|x+y\|^2\leqslant 2(\|x\|^2+\|y\|^2)。\qquad (9)$$

94. 極限。完备性公理　介紹極限概念

定义　元 x 叫做元序列 x_n 的極限，是指对于任意預定正数 ε，必存在一数 N，使当 $n>N$ 时 $\|x-x_n\|\leqslant\varepsilon$。

为了表示 x 是 x_n 的極限，我們将写成 $x_n\to x$。不难証明，極限

只能有一个。事实上,設 $x_n \Rightarrow x$, $x_n \Rightarrow y$。依(8),可以写成:

$$\|x-y\| \leqslant \|x-x_n\| + \|x_n-y\|。$$

当 n 无限地增大时,右边趋向于零,而左边与 n 无关,所以 $\|x-y\|=0$,因此 $x=y$。現在証明关于和与数积的連續性的定理。

定理 1. ax, $x+y$, 及 (x, y) 諸式都是 a, x 及 y 的連續函数。

設 $x_n \Rightarrow x$。我們要証 $ax_n \Rightarrow ax$。这由公式 $\|ax-ax_n\|=|a|\,\|x-x_n\|$ 直接可以得出。現在設 $a_n \to a$ 而 $x_n \Rightarrow x$,則必須証明 $a_n x_n \Rightarrow ax$。对于和

$$ax - a_n x_n = (ax - a_n x) + (a_n x - a_n x_n)$$

应用三角形不等式:

$$\|ax - a_n x_n\| \leqslant |a-a_n|\,\|x\| + |a_n|\,\|x-x_n\|。$$

由此直接可得 $a_n x_n \Rightarrow ax$。和 $x+y$ 的連續性直接由公式

$$(x+y)-(x_n+y_n)=(x-x_n)+(y-y_n)$$

及三角形法則得出。最后証明数积的連續性。設 $x_n \Rightarrow x$, $y_n \Rightarrow y$,要証明 $(x_n, y_n) \to (x, y)$。設 $x_n = x+u_n$,及 $y_n = y+v_n$,而由于 $x_n \Rightarrow x$ 及 $y_n \Rightarrow y$,元 u_n 及 v_n 的范数趋向于零。于是

$$(x, y)-(x_n, y_n)=(x, y)-(x+u_n, y+v_n)=$$
$$=-(x, v_n)-(u_n, y)-(u_n, v_n),$$

而应用不等式(6),可得

$$|(x, y)-(x_n, y_n)| \leqslant \|x\|\,\|v_n\| + \|u_n\|\,\|y\| + \|u_n\|\,\|v_n\|。$$

当 n 无限地增大时,右边趋向于零,由此可得关于数积連續性的結論。如果令 $y=x$,則得

系 如果 $x_n \Rightarrow x$,則 $\|x_n\| \to \|x\|$。

定义 我們說元序列 x_n 自收斂,是指对于任意預定的正数 ε,必存在一数 N,使当 m 及 $n>N$ 时 $\|x_m-x_n\| \leqslant \varepsilon$。

如果序列 x_n 有極限 x,那末它必然是自收斂的。事实上,依(8),

$$\|x_m - x_n\| \leqslant \|x_m - x\| + \|x - x_n\|。$$

当 m 及 n 无限增大时，则右边趋近于零，所以左边也必如此，就是說序列 x_n 自收斂。逆命題，卽由自收斂而得 x_n 的極限的存在，并不是上面公理的推論，而我們应当取这命題当做新公理。

公理 D 如果序列 x_n 自收斂，那末在 H 中存在一元 x，使 $x_n \Rightarrow x$。

这公理通常叫做空間 H 的完备性公理。应用極限概念，也可以論及由 H 中的元組成的級数：

$$u_1 + u_2 + \cdots \tag{9$_1$}$$

的收斂性。如此一級数叫做收斂的，是指当 n 无限增大时前 n 項之和 $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 趋向于極限：$s_n \Rightarrow x$。这極限叫做級数之和。由完备性的公理及上面所論的自收斂性，直接可得上写級數收斂的必要且充分的条件：对于任意預定的正数 ε，必有一数 N 存在，使当 $n > N$ 及 $p > 0$ 时，

$$\|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}\|^2 \leqslant \varepsilon^2。 \tag{10}$$

当級数 (9_1) 中的諸項两两正交时，則在这情形中收斂条件取特别簡單的形式。

定理 2 如果級数 (9_1) 的諸項是两两正交的，則对于这級数收斂的必要且充分的条件乃是下面由正數組成的級數收斂：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|^2。 \tag{11}$$

这定理由下面事实直接可以得出，卽在所論的情形下，依畢达哥拉定理可以把条件 (10) 写成下面形式：当 $n > N$，$p > 0$ 时，

$$\|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}\|^2 =$$
$$= \|u_{n+1}\|^2 + \|u_{n+2}\|^2 + \cdots + \|u_{n+p}\|^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

而这后者乃是級数 (11) 收斂的必要且充分的条件。不难証明，在所考察的情形下，級数和与諸項的次序无关。

95. 正交組。可分性 我們說元序列

$$x_1, x_2, x_3, \cdots \tag{12}$$

組成一規格化正交組，是指

$$\text{当}\quad \begin{array}{l} p\neq q \text{ 时} \\ p=q \text{ 时} \end{array} \quad (x_p, x_q)=\begin{cases}0, \\ 1。\end{cases} \tag{13}$$

注意定理 2 可知对于級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \tag{14}$$

的收斂，必要且充分的条件乃是下面由非負数組成的級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \tag{15}$$

收斂。設这条件滿足，并用 x 表級数 (14) 之和。作数积

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k, x_p\right)。$$

当 $n \geqslant p$ 时这数积依 (13) 等于 a_p，所以当 $n \to \infty$ 时可得

$$a_p = (x, x_p)。\tag{16}$$

由这公式决定的数 a_p 叫做元 x 相关于組 (12) 的傅立叶系數，而級数 (14) 称做元 x 的傅立叶級数。显然

$$\left\| x-\sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2, \tag{17}$$

而当 n 无限增大时可得閉性方程

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2。\tag{18}$$

由上面的推理可知，如果級数 (14) 收斂，那末它是它的和 x 的傅立叶級数，而閉性方程 (18) 成立。現在反之，設預知 H 中某一元 x。作它的傅立叶系数 (16)，并写出公式 (17)。由此可得貝色勒不等式：

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leqslant \|x\|^2。\tag{19}$$

左边的級数必然是收斂的，就是說任意元 x 的傅立叶級数必然是收斂的。如果在公式 (19) 中等式成立，則依 (17)，这意味着元 x 的傅立叶級数的和等于这元 x。如果 (19) 对于 H 中任意元 x 都是等式，則組 (12) 叫做閉的。組 (12) 叫做完全的，是指除零元之外在 H 中沒有一个元能与一切 x_k 正交。与在 [59] 中完全一样，可以証明閉性与完全性是等效的。如果組 (12) 是閉的，那末凡 H 中的元可以唯一地表成收斂級数 (14) 的形式，就是表示成它的傅立叶級数。設 a_k 是元 x 的傅立叶系数，而 b_k 是元 y 的。如果組 (12) 是閉的，那末，与在 [59] 中一样，应用閉性方程 (18) 于元 x 及 y 上，可得广义閉性方程：

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k。\tag{18$_1$}$$

再注意，如果 c_k 是任意复数，而 a_k 是元 x 的傅立叶系数，那末下面公式成立（参照 [59]）：

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k - a_k|^2,$$

与 (17) 比較，可以看出，所得公式的左边当 c_k 是元 x 的傅立叶系数时取得最小值。

注意，如果取函数空間 L_2 做空間 H 的具体表現，那末 H 中的收斂将与 L_2 中的依中值收斂相应，后者曾在 [57] 中論过。傅立叶級数的收斂如此就化成 [59] 中的閉性方程。

現在回忆一下在 n 維复空間的情形中已曾使用过的正交化程序 [見 III; 31]。設有由 H 中元組成的无穷序列，并且其中各元都异于零元：

$$z_1, z_2, z_3, \cdots。\tag{20}$$

作規格化的元 $x_1 = z_1 : \|z_1\|$。設 z_l 是 (20) 中在 z_1 以后凡不能表成 $a_1 x_1$ 形式的第一个元。作元 $y_2 = z_l - (z_l, x_1) x_1$，这自然不是零元，

現在把它規格化，就是作 $x_2=y_2:\|y_2\|$。設 z_t 是 (20) 中在 z_s 以后凡不能表示成 $a_1x_1+a_2x_2$ 形式的第一个元。作元

$$y_3=z_t-(z_t,\ x_1)x_1-(z_t,\ x_2)x_2,$$

則这元自然不是零元，于是把它規格化，作元 $x_3=y_3:\|y_3\|$。如此繼續下去，可得一規格化正交組 (12)，而这組具有下列性質：卽凡元 x_k 是 (20) 中諸元的有穷一次組合，而反之，元 z_k 可以用前 k 个 x_i 表示出来。諸元 z_k 可能有綫性相关的。但两两正交并异于零元的諸 x_i 是綫性无关的。事实上，就等式

$$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_mx_m=0$$

成立。把双方用 x_k 乘，并注意諸 x_k 的两两正交性，可得 $c_k\|x_k\|^2=0$，因此 $c_k=0(k=1,\ 2,\cdots,m)$，由此可知其綫性无关性。

于是發生了下面問題：在 H 中是否存在由可数多个元組成的規格化正交閉組？在前面諸公理的基础上解决这問題是不可能的。我們将指出所提問題及空間 H 的某些屬性間的关系。我們說，H 中一些元所組成的集合 M 是在 H 中到处稠密的，是指对于任意預定的正数 ε 及 H 中的任意元 x，必存在 M 中的一元 u，滿足 $\|x-u\|\leqslant\varepsilon$。空間 H 叫做可分空間，是指有一可数的元集合 M 在 H 中到处稠密。設

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\cdots \tag{21}$$

是这一集合。如果把諸元 u_k 正交化，則得由可数多元組成的一个規格化正交閉組[1]。反之，如果这样一組 (12) 存在，則以隨意的有理复数系数 c_k 作有穷和 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_mx_m$，可得一可数元集合，在 H 中到处稠密。如此可分性与在空間 H 中有由可数多元組成的規格化正交閉組存在这一性質同效。我們曾看到过，空間 L_2 及 l_2 都是可分的。整个的 H 空間論可以不用可分性来研究，但我們假設这一性質以簡化某些証明。只是在下面研討中不多的地方才会用到它。

公理 E　空間 H 是可分的。

再証明：如果 H 是可分的，則凡規格化正交組必只包含有穷多或可数无穷多元。設 x 及 y 是两个互相正交的規格化元，就是說 $(x, y)=0$，而 $\|x\|=\|y\|=1$。显然 $(x-y, x-y)=\|x\|^2+\|y\|^2==2$，卽 $\|x-y\|=\sqrt{2}$，就是說两个相互正交的規格化元間的距离等于 $\sqrt{2}$。現在設有某一集合 $\mathscr{E}\{v\}$，其中的元两两正交，并且是規格化的。取定一个小于 $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 的正数 ε。对于 $\mathscr{E}$ 中的任意元 v 必存在一屬于在 H 中到处稠密的集合 (21) 的元 u_k，滿足 $\|u_k-v\|\leqslant\varepsilon$。另一方面当 k 固定时，在集合 $\mathscr{E}$ 中只存在一个元能滿足不等式 $\|u_k-v\|\leqslant\varepsilon$，而为如果有两个元 v_1 及 v_2 都滿足这不等式，那末依三角形法則可得 $\|v_1-v_2\|\leqslant 2\varepsilon<\sqrt{2}$，而既然 v_1 及 v_2 是互相正交的規格化元，这是不可能的。由上面的推理直接可知元集合 $\mathscr{E}\{v\}$ 或者是有穷的，或者是可数的。

96. 子空間。投影　介紹某些与 H 中元集合的考察相联系着的新概念。如果 x_0 是 H 中某一元，那末这元的 ε 邻域是指凡滿足条件 $\|x_0-x\|\leqslant\varepsilon$ 的元 x 所組成的集合。設 $\mathscr{E}$ 是 H 中某一元集合。元 u 叫做这集合 $\mathscr{E}$ 的極限元，是指在元 u 的任意 ε 邻域中必有 $\mathscr{E}$ 中的无穷多元存在。集合 $\mathscr{E}$ 叫做閉的，是指它包括它的一切極限元。如果集合 $\mathscr{E}$ 不是閉的，則把它的一切極限元添加到它里面，可得一閉集合，我們用 $\overline{\mathscr{E}}$ 表示这后一集合。这点由应用 (8) 不难証明。添加 $\mathscr{E}$ 的極限元于 $\mathscr{E}$ 中的程序叫做取集合 $\mathscr{E}$ 的閉包。集合 L 叫做綫性簇，是指它滿足下面的条件：如果元 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 屬于 L，則它們的任意綫性組合式 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_mx_m$ 也屬于 L。以前曾举过函数空間 L_2 中的綫性簇的例。再举一个对于以后很重要的概念。凡閉的綫性簇叫做子空間。綫性簇并不一定是閉的。例如在 [61] 中考虑过的那些綫性簇都不是閉的。我們曾証明过，它們都是在 L_2 中到处稠密的，因此，如果取它們的閉包，

則得出整个空間 L_2。在有穷維空間 R_n 中的綫性族都是閉的。在通常的三維实矢量空間中，下面都是子空間的例：整个空間，通过原点的平面，及通过原点的直綫。如果 x_1 是 H 中的任意元，那末諸元 a_1x_1 所組成的集合（a_1 是隨意复数）是一子空間。如果 x_1 及 x_2 是 H 中任意两个綫性无关元，那末凡元 $a_1x_1+a_2x_2$ 的集合（a_1 及 a_2 是任意复数）是子空間。凡这些例都是有穷維的子空間。也有无穷維的子空間。如此的子空間的一个例乃是全空間 H。形式上，由零元自己所成的集合也滿足子空間的定义。这一子空間叫做零子空間。如果 L 是非閉的綫性族，那末取它的閉包可得一子空間 $\overline{L}$。这命題的証明并无困难。

凡屬于任意一个固定的子空間 L 的元所成的集合滿足上面的一切公理，但可能不滿足公理 B，因为子空間 L 可以是有穷維的。如此，凡无穷維的子空間 L 可以看作是独立的复希勒柏特空間。上面所說关于可分性公理以外的一切公理都是完全显然的。至于这一公理，必須証明下面的命題：如果 H 是可分的，則其任何子空間 L 都自成一可分的希勒柏特空間。这命題之証明并无困难，我們略过。

两子空間 L 及 M 称做互相正交的，是指 L 中任意元与 M 中任意元都相正交。此时我們写做 $L\perp M$。元 x 叫做与子空間 L 正交，是指 x 与 L 中的任意元正交。我們写做 $x\perp L$。現在証明一定理，对于以后有基本的意义。

定理 3. 如果 L 是子空間，那末 H 中任意元 x 可以表示成下面形式：

$$x=y+z, \tag{22}$$

而 $y\in L$；$z\perp L$。(22) 中的表示是唯一的。

如果 $x\in L$，那末可写做 $x=x+0$，从而得 (22) 这种表示式。現在設 x 不屬于 L。設 d 是正数 $\|x-y\|^2$ 所成集合的下确界，其

中 y 遍表子空間 L 中的元：

$$d=\inf_{y\in L}\|x-y\|^2。\tag{23}$$

如此必存在屬于 L 的一序列元 y_n，滿足

$$(x-y_n,\ x-y_n)=\|x-y_n\|^2=d_n\to d。\tag{24}$$

設 u 是 L 中任意元。既然 L 是子空間，对于任意的实数 ε，元 $y_n+\varepsilon u$ 都屬于 L（ε 是复数也可以），而注意 (23)，可以写出 $(x-y_n-\varepsilon u,\ x-y_n-\varepsilon u)\geqslant d$。展开上面的数积，可得不等式

$$(u,\ u)\varepsilon^2-2R(x-y_n,\ u)\cdot\varepsilon+(d_n-d)\geqslant 0。$$

左边三項式对于任意实数 ε 都是非負的，因此可得

$$|R(u,\ x-y_n)|\leqslant\sqrt{d_n-d}\cdot\|u\|。\tag{25}$$

現在加强这不等式。設 φ 是复数 $(u,\ x-y_n)$ 的輻角，就是說 $(u,x-y_n)=|(u,\ x-y_n)|e^{i\varphi}$。在不等式(25)中把元 u 換成元 $ue^{-i\varphi}$，这后一元也屬于 L。注意 $\|ue^{-i\varphi}\|=\|u\|$，而

$$(ue^{-i\varphi},\ x-y_n)=e^{-i\varphi}(u,\ x-y_n)=|(u,\ x-y_n)|,$$

于是由不等式 (25) 可得更精密的不等式

$$|(u,\ x-y_n)|\leqslant\sqrt{d_n-d}\,\|u\|。\tag{26}$$

現在提醒一下，在这不等式中 x 是 H 中的已知元，y_n 是 L 中的元序列，并滿足条件 (24)，u 是 L 中的任意元。現在估計一下数积 $(u,\ y_n-y_m)$ 的絕对值。把差 y_n-y_m 表示成下面形式：$y_n-y_m=(y_n-x)+(x-y_m)$，并使用不等式 (26)，可得

$$|(u,\ y_n-y_m)|\leqslant|(u,\ x-y_n)|+|(u,\ x-y_m)|\leqslant$$
$$\leqslant(\sqrt{d_n-d}+\sqrt{d_m-d})\|u\|。$$

在这不等式中令 $u=y_n-y_m$，并把兩边用 $\|y_n-y_m\|$ 除，得不等式

$$\|y_n-y_m\|\leqslant\sqrt{d_n-d}+\sqrt{d_m-d}。$$

注意如果 $\|y_n-y_m\|=0$，則上面不等式更是显然的。当无限地增大 m 及 n 时，依 (24)，右边趋向于零，因而元序列 y_n 是自斂敛

的。依完备性公理必存在一元 y，满足 $y_n \Rightarrow y$，而既然 L 是子空間，那末 $y \in L$。另一方面，在不等式 (26) 中取極限，則对于凡屬于 L 中的元 u 可得 $(u, x-y)=0$，就是說差 $x-y$ 与 L 正交。如把这差表成 z，則得公式 (22)，而 $y \in L$, $z \perp L$。剩下的只是証明所得表示式 (22) 的唯一性了。設有两表示式

$$x = y + z = y_1 + z_1,$$

而 y 及 $y_1 \in L$, z 及 $z_1 \perp L$。显然 $y - y_1 = z_1 - z$。这等式的左边表示一屬于 L 的元，而右边是与 L 正交的元。由此可知 $(y-y_1, y-y_1)=0$，就是說 $\|y-y_1\|=0$，因此 $y=y_1$，所以 $z_1=z$。于是定理完全得証了。

公式 (22) 中那个屬于 L 的元 y 叫做元 x 在子空間 L 中的投影。凡与一子空間 L 正交的元所成集合显然是一子空間。把它表示成 M。依上面証明的定理，凡屬于 L 的元 x 可以唯一地表示成两元之和的形式，而这和中一元屬于 L，另一元屬于 M。凡与 M 正交的元組成的集合正是子空間 L。在这种关系中，子空間 L 与 M 的关系是相互的，而如此两个子空間叫做相补的子空間，在三維实空間中，例如平面 XY 及軸 Z 就是相补的子空間。現在轉依而考察空間 H 中的泛函。

97. 泛函 泛函概念的介紹与在連續函数空間 C 中完全一样 [15]。所謂 H 中的泛函，是指一确定的規律，使对于 H 中任一元都与一确定的复数相应。关于泛函，介紹下面的記号：$l(x)$ 或 $m(x)$，等等。泛函 $l(x)$ 叫做分配的，是指对于任意的有穷綫性組合 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_mx_m$，它都能满足等式

$$l(c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_mx_m)= \\ =c_1l(x_1)+c_2l(x_2)+\cdots+c_ml(x_m)。 \tag{27}$$

泛函 $l(x)$ 叫做有界的，是指存在一正数 N，对于 H 中任意元 x 都满足不等式

$$|l(x)| \leqslant N\|x\|。\tag{28}$$

既分配又有界的泛函叫做綫性泛函。还可以介紹連續泛函的概念，就是說，泛函 $l(x)$ 叫做連續的，是指当 $x_n \Rightarrow x$ 时 $l(x_n) \to l(x)$。对于綫性泛函，依(27)及(28)可得 $|l(x)-l(x_n)| \leqslant N\|x-x_n\|$，由此可以看出，凡綫性泛函都是連續的。可以証明，在假設有分配性之后，泛函的有界性与其連續性是同效的，現在举几个 H 中綫性泛函的例。設 y 是 H 中一固定元。設

$$l(x)=(x, y)。\tag{29}$$

$l(x)$ 的分配性可由数积对于 x 的分配性直接得出，而其有界性由不等式（6）得出：

$$|l(x)|=|(x, y)| \leqslant \|y\| \cdot \|x\|,\tag{30}$$

而 $\|y\|$ 起着数 N 的作用。注意在公式(30)中当 $x=y$ 时等式成立，就是說在这公式中因子 $\|y\|$ 不能換成較小的数。公式(29)事实上給出了 H 中的一切可能的綫性泛函，就是說，下面重要定理成立：

定理 4. 凡綫性泛函 $l(x)$ 可以唯一地表示成(29)的形式，其中 y 是 H 中某一固定元。

由綫性泛函的分配性，$l(\theta)=0$，其中 θ 表示 H 中的零元。数 L 是凡滿足 $l(x)=0$ 的元 x 所組成的集合。依 $l(x)$ 的分配性及連續性，L 是子空間。可能 L 是整个空間 H，就是說对于凡元 x，$l(x)=0$。如此的泛函显然可以表示成 $l(x)=(x, \theta)$ 的形式。現在考察一般情形，即子空間 L 是 H 的真部分。設 z 是 H 中某一固定元，并且不屬于 L。依定理 3 可以把它表示成 $z=u+v$ 的形式，其中 $u \in L$，$v \perp L$，而 $v \neq \theta$。既然 v 不屬于 L，可知 $l(v) \neq 0$。設 x 是 H 中任意元。作元 $w=x-\frac{l(x)}{l(v)}v$，并考察 $l(w)$：

$$l(w)=l(x)-\frac{l(x)}{l(v)}l(v)=l(x)-l(x)=0。$$

如此可以看出，元 $w=x-\frac{l(x)}{l(v)}v$ 属于 L，而在上面曾看到 $v\perp L$。于是可得

$$\left(x-\frac{l(x)}{l(v)}v,\ v\right)=0,$$

展开数积可得

$$(x,\ v)-\frac{l(x)}{l(v)}\|v\|^2=0,$$

由此可知 $l(x)$ 可以表示成数积

$$l(x)=\left(x,\ \frac{\overline{l(v)}}{\|v\|^2}v\right)=(x,\ y)\text{，而 } y=\frac{\overline{l(v)}}{\|v\|^2}v\text{。}$$

剩下只須証明 $l(x)$ 表示成数积的唯一性就够了。設 $l(x)=(x,y)=$ $=(x,\ y_1)$。由此对于 H 中的任意元 x 可知 $(x,\ y-y_1)=0$。設 $x=y-y_1$，則 $\|y-y_1\|=0$，就是說 $y=y_1$，于是定理完全証明了。

由剛証明了的定理可知，对于函数空間 L_2，綫性泛函的一般形式乃是

$$\Phi[f(x)]=\int_{\mathscr{B}}f(P)\overline{g(P)}G(d\mathscr{B}),$$

而 $g(P)$ 是 L_2 的固定元。对于空間 l_2，綫性泛函的一般形式乃是

$$x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2+x_3\bar{y}_3+\cdots,$$

而 $y(y_1,\ y_2,\ y_3,\cdots)$ 乃是 l_2 中的固定元。

有时上面定义的泛函叫做第一种綫性泛函。而所謂第二种綫性泛函是指有界泛函，但不满足 (27) 而满足

$$l_1(c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_mx_m)=$$
$$=\bar{c}_1l_1(x_1)+\bar{c}_2l_1(x_2)+\cdots+\bar{c}_ml_1(x_m),\qquad(27_1)$$

就是說，常数因子由泛函号下提出时須换成共軛复数。第二种綫性泛函的一个例就是数积，但变元 x 占第二位置，固定元 y 占第一位置：

$$l_1(x)=(y,\ x)\text{。}\qquad(29_1)$$

如果 $l_1(x)$ 是第二种綫性泛函，则 $l(x)=\overline{l_1(x)}$ 是第一种綫性泛函。由此及定理 4 直接可知，公式(29_1)正是第二种綫性泛函的一般形式。

关于并非对一切 H 中的元定义的泛函还要作一按語。設 L 是綫性簇，在 H 中到处稠密，而 $l(x)$ 是对凡屬于 L 的元 x 定义的分配泛函。此外，設泛函 $l(x)$ 在 L 上有界，就是說 $|l(x)|\leqslant\leqslant N\|x\|$，如果 $x\in L$。取某一不屬于 L 的元 y。既然綫性簇 L 在 H 中到处稠密，必有一屬于 L 的元序列 x_n，滿足 $x_n\Rightarrow y$，所以当 m, n 足够大时，范数 $\|x_n-x_m\|$ 成为任意小。依泛函 $l(x)$ 在 L 上的分配性及有界性，$|l(x_n)-l(x_m)|\leqslant N\|x_n-x_m\|$，由此可知复数序列 $l(x_n)$ 必有極限值。我們用 α 表示。如果取 L 中另一个趋向于 y 的元序列 x'_n，则如上面可以証明，$l(x'_n)$ 也有極限值。我們用 β 表示它，并証明 $\beta=\alpha$。为达到这目的，应注意元序列 $x_1, x'_1, x_2, x'_2,\cdots$ 也趋向于 y，而依上面所証的，复数序列 $l(x_1), l(x'_1), l(x_2), l(x'_2),\cdots$ 必有極限值。由此直接可知序列 $l(x_n)$ 及序列 $l(x'_n)$ 有同一極限值，即 $\beta=\alpha$。如此，只要是元序列 x_n 屬于 L 并且 $x_n\Rightarrow y$，而 y 是不屬于 L 的一个确定元，复数序列 $l(x_n)$ 必然有一确定的極限，而这極限值与从 L 中选取的元序列 x_n 无关。所必需的仅是 $x_n\Rightarrow y$ 而已。如此很自然地可以将泛函 $l(x)$ 的定义扩展到整个 H 上，就是令 $l(y)=\lim\limits_{n\to\infty} l(x_n)$ 就够了。不难証明，如此扩展的泛函在整个 H 上都是分配的而且 $|l(x)|\leqslant N\|x\|$。如此，如果在 L 上給出一个分配而有界的泛函，而 L 在 H 中到处稠密，那末这泛函的定义可以唯一地扩展到整个 H 上去，而所得定义于整个 H 上的泛函乃是綫性泛函。

98. 綫性运算子 运算子的定义与泛函的定义[97]相似。我們所論的只是定义于整个空間 H 上的运算子。所謂在 H 中的运算子，是指凡对 H 中的每个元使 H 中有一个确定元与它相应的

确定規律。对于运算子引用記号 Ax, Bx, …。运算子的分配性由公式

$$A(c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_mx_m)=c_1Ax_1+c_2Ax_2+\cdots+c_mAx_m \quad (31)$$

定义，而其有界性由公式

$$\|Ax\|\leqslant N\|x\| \quad (32)$$

定义，其中 N 是某一正数。分配且有界的运算子叫做綫性运算子。与在泛函的情形一样，如此的运算子一定是連續的，就是說如果 $x_n\Rightarrow x$，則 $Ax_n\Rightarrow Ax$。对于分配的运算子，其有界性与其連續性是同效的。我們在此不加証明。有时上面定义的运算子叫做綫性有界运算子。在本章中我們只考虑有界运算子，因此上面定义的运算子將簡称做綫性运算子，或甚至簡称做运算子。

如果取某一正数 N，不等式 (32) 对于任意元 x 都成立，那末对于較 N 大的数它更成立了。凡使不等式 (32) 对于任何 x 满足的正数 N 組成一集合，这集合的下确界叫做运算子 A 的范数。我們用記号 n_A 表示它。不难看出，如果令 $N=n_A$，則不等式 (32) 依然成立，就是說

$$\|Ax\|\leqslant n_A\|x\|。 \quad (33)$$

如果 $N<n_A$，不等式 (32) 对于某一元 x 必不能成立。如果 θ 表零元，則依分配性，对于任意运算子必然有 $A\theta=\theta$。如果 $x\neq\theta$，則把(33)两边用 $\|x\|$ 除，并应用运算子的分配性，可以把不等式(33)写成下列形式：

$$\left\|A\frac{x}{\|x\|}\right\|\leqslant n_A, \quad (33_1)$$

而元 $\frac{x}{\|x\|}$ 的范数显然等于 1。反之，由 (33_1) 可得 (33)，只須把 (33_1) 两边用 $\|x\|$ 乘就够了。由不等式 (33_1) 可知运算子 A 的范数 n_A 可依下面方式定义：n_A 乃是对于凡满足 $\|x\|=1$ 的 x 值 $\|Ax\|$ 的上确界：

$$n_A=\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|。\tag{34}$$

我們指出运算子的几个简單例子。如果对于任意元 x, $Ax=x$,那末这运算子很自然地叫做不变映像的运算子。其范数等于1。如果对于任意元 x, $Ax=0$,就是說运算子 A 使一切元 x 都等于零,则这运算子叫做零运算子。它的范数等于零。設 L 是某一子空間,而 $Ax=y$,其中 y 是 x 在子空間 L 中的投影。不难証明,如果 L 不是仅由零元組成的,則上面的 A 是一綫性运算子,其范数是1。

如果 A 及 B 是两个运算子,对于任意元 x 都满足 $Ax=Bx$,那末我們說 A 与 B 相等,并写成 $A=B$。如果某一綫性簇 L 在 H 中到处稠密,而有一分配有界运算子 A 定义于 L 上,那末,与在泛函的情形一样,这运算子可以唯一地扩展到整个 H 上,并且仍保持其分配性及有界性,而在这扩展中其原来在 L 中的范数并不增大。

如果 A 及 B 是两个运算子,而 a 及 b 是两个复数,那末 $aA+bB$ 是一綫性运算子,并有等式

$$(aA+bB)x=aAx+bBx。\tag{35}$$

如果注意到

$$\|aAx+bBx\|\leqslant|a|\cdot\|Ax\|+|b|\cdot\|Bx\|\leqslant(|a|n_A+|b|n_B)\|x\|,$$

則可以看出,运算子 $aA+bB$ 的范数 $\leqslant|a|n_A+|b|n_B$。如此,运算子可以用复数乘,并可以相加。这些运算并遵守平常的代数規律。先后使用运算子 A 及 B 的結果仍是一綫性运算子,我們用記号 BA 表示。依另一次序而使用这两运算子得出另一綫性运算子 AB 来,后者一般說来与 BA 不同。我們管运算子 BA 及 AB 叫做运算子 A 与 B 之积。这定义可以直接推广到任意有穷多个因子的情形上去。一般說来运算子的积随着因子次序的顛倒而改变,如果 $AB=BA$,則我們說这两运算子是交换的。因为

$$\|BAx\| \leqslant n_B \|Ax\| \leqslant n_B n_A \|x\|,$$

所以积 AB 及 BA 的范数 $\leqslant n_B n_A$。 还要注意，如果 a 是复数，而 A 是运算子，那末 aA 的范数恰好等于 $|a| n_A$。显然运算子的乘积遵守結合律，即

$$C(BA) = (CB)A,$$

及分配律：

$$(A+B)C = AC+BC, \ C(A+B) = CA+CB。$$

現在介紹共軛运算子的概念。設 A 是某一綫性运算子；考察数积 (Ax, y)。对于任意固定元 y，这数积是 x 的泛函。其分配性是数积的分配性的結果，而其有界性由下列公式而显然：

$$|(Ax, y)| \leqslant n_A \|y\| \|x\|。$$

但依定理 4，凡如此的泛函可以唯一地表現成数积的形式。如此，对于任意固定元 y，必存在一确定元 y^*，使

$$(Ax, y) = (x, y^*) \tag{36}$$

对于 H 中任意元 x 都成立。如此，上写的公式定出一个确定的規律来，使凡一元 y 与一确定的元 y^* 相应。 把这規律写成 $y^* = A^*y$ 的形式，而 A^* 是某一运算子的記号。其分配性可以由数积的分配性直接得出，即 (Ax, y) 及 (x, y^*) 都是依第二变元分配的。以后将証明运算子 A^* 也是有界的。这运算子 A^* 叫做与 A 共軛的。現在可以把公式 (36) 写成下列形式：

$$(Ax, y) = (x, A^*y)。 \tag{37}$$

由上面共軛运算子的定义直接可得下面关于运算子的和及积的共軛运算子的公式：

$$\left.\begin{aligned} &(aA)^* = \bar{a}A^*; \ (A+B)^* = A^*+B^*; \\ &(AB)^* = B^*A^*; \ (A^*)^* = A。\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

例如我們来証明上写的第三公式。应用定义 (37) 两次可得

$$(ABx, y) = (Bx, A^*y) = (x, B^*A^*y),$$

由此可得 $(AB)^*=B^*A^*$。再証明公式 (38) 中的最后一个。应用定义 (37) 及 [93] 的性質 8，可得

$$(A^*x,\ y)=\overline{(y,\ A^*x)}=\overline{(Ay,\ x)}=(x,\ Ay),$$

由此可知 $(A^*)^*=A$。最后証明运算子 A^* 是有界的。即我們証明：

定理 5. 共軛运算子的范数等于原来运算子的范数：即 $n_{A^*}=n_A$。

在公式 (37) 中令 $x=A^*y$，并应用不等式 (6) 及 (33)，可得

$$\|A^*y\|^2=|(A(A^*y),\ y)|\leqslant\|A(A^*y)\|\cdot\|y\|\leqslant n_A\|A^*y\|\cdot\|y\|,$$

由此可得 $\|A^*y\|\leqslant n_A\|y\|$，因此 $n_{A^*}\leqslant n_A$。既然 $(A^*)^*=A$，完全同样地可以証明 $n_A\leqslant n_{A^*}$，由此可知 $n_{A^*}=n_A$。

运算子 A 叫做自共軛的，是指 $A^*=A$。如此，自共軛运算子的特征乃是它滿足等式

$$(Ax,\ y)=(x,\ Ay)。\tag{39}$$

如果在这等式中令 $y=x$，并注意 [93] 的性質 8，那末可知在自共軛运算子的情形下，$(Ax,\ x)$ 对于任意元 x 都是实数。逆命題也是正确的。

定理 6. A 是自共軛的必要且充分的条件乃是 $(Ax,\ x)$ 对于任意元 x 都是实数。

必要一节上面已曾証过了。現在設 $(Ax,\ x)$ 对于任意选擇的 x 都是实数，并証明 A 是自共軛运算子。依条件，

$$(A(x+y),\ x+y)=(x+y,\ A(x+y));$$

而
$$(A(x+iy),\ x+iy)=(x+iy,\ A(x+iy))。$$

展开数积，并注意 $(Ax,\ x)=(x,\ Ax)$，$(Ay,\ y)=(y,\ Ay)$，可得：

$$(Ay,\ x)+(Ax,\ y)=(y,\ Ax)+(x,\ Ay),$$

$$(Ay,\ x)-(Ax,\ y)=(y,\ Ax)-(x,\ Ay)。$$

逐項相減，可得公式 (39)，由此可得 A 是自共軛运算子。

注意公式(38)，可以看出，以实系数a_k所作自共軛运算子的任意一次組合式$a_1A_1+a_2A_2+\cdots+a_mA_m$仍是自共軛的运算子，而自共軛运算子的积$AB$是自共軛运算子的必要且充分的条件乃是$A$与$B$可以交换。

設A是任意綫性运算子。作下面两个运算子：

$$A_1=\frac{1}{2}(A+A^*);\quad A_2=\frac{1}{2i}(A-A^*)。\tag{40}$$

注意公式(38)，可以看出，A_1及A_2都是自共軛运算子。如此任意运算子A可以如下地用自共軛运算子表示出来：$A=A_1+iA_2$。下面主要地是研究自共軛运算子。

99. 双綫性泛函及二次泛函 現在将指出借一种特殊泛函来定义任意綫性运算子的可能性。所謂双綫性泛函，是指一确定的規律，依此規律使H中的任意一对元x及y与一确定的复数$l(x,y)$相应，而$l(x,y)$是像第一种泛函那样地依第一变元分配，并且是像第二种泛函那样地依第二变元分配的：

$$\begin{aligned}&l(ax_1+bx_2,y)=al(x_1,y)+bl(x_2,y);\\&l(x,ay_1+by_2)=\bar{a}l(x,y_1)+\bar{b}l(x,y_2)。\end{aligned}\tag{41}$$

此外，并設双綫性泛函是有界的，即設存在一正数N，使H中任意两元x及y都满足不等式

$$|l(x,y)|\leqslant N\|x\|\cdot\|y\|。\tag{42}$$

如果A是任意綫性运算子，那末公式

$$l(x,y)=(Ax,y)\tag{43}$$

就决定一个双綫性泛函，我們不难証明这点。事实上，这公式給出了一切可能的双綫性泛函。

定理7. 凡双綫性泛函都可以唯一地表成公式(43)的形式，而其中A是一个綫性运算子。

如果固定元y，那末双綫性泛函$l(x,y)$变成关于x的第一种

泛函，而依定理 4，可以写成 $l(x, y)=(x, y^*)$，并且元 y^* 是依从于 y 的选择的，就是說 $y^*=By$，其中 B 是某一运算子。其分配性直接由 (41) 中第二公式得出，因为 (x, y^*) 依 y^* 是分配的。現在証明运算子 B 的有界性。注意 (42)，可写

$$|(x, y^*)| \leqslant N\|x\| \cdot \|y\|,$$

而在这不等式中令 $x=y^*$，可得不等式 $\|y^*\|=\|By\| \leqslant N\|y\|$，由此可知 B 是有界的。如此可以把公式 $l(x, y)=(x, y^*)$ 写成下面形式：$l(x, y)=(x, By)$，而 B 是一綫性运算子。改用共軛运算子，可以写成 $l(x, y)=(B^*x, y)$。如果令 $A=B^*$，那末可得公式 (43)。剩下的只是証明表示式 (43) 的唯一性了。設

$$l(x, y)=(Ax, y)=(A_1x, y)。$$

由此可知对于一切 x 及 y，等式 $(Ax-A_1x, y)=0$ 都成立。在其中令 $y=Ax-A_1x$，則得 $\|Ax-A_1x\|=0$，就是說对于任意 x，$Ax=$ $=A_1x$，所以运算子 A 及 A_1 相等，于是定理完全証明了。由所証的定理可知給出綫性运算子与給出双綫性泛函是同效的。完全同样，在代数中給出矩陣的元 a_{ik} 与給出双綫性式

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_k\bar{y}_i$$

是同效的。

凡双綫性泛函 $l(x, y)$ 都能生成与它相应的二次泛函（在代数中的二次式或埃尔密特式），只要令 $y=x$ 就够了：

$$l(x, x)=(Ax, x)。$$

不难使双綫性泛函由与它相应的二次式生出来，因为很容易証明下面的等式：

$$(Ax, y)=$$
$$=[(Ax_1, x_1)-(Ax_2, x_2)]+i[(Ax_3, x_3)-(Ax_4, x_4)], \quad (44)$$

而其中

$$x_1=\frac{1}{2}(x+y);\quad x_2=\frac{1}{2}(x-y);$$
$$x_3=\frac{1}{2}(x+iy);\quad x_4=\frac{1}{2}(x-iy)。\tag{44$_1$}$$

在 (44) 的右边乃是四个二次泛函。以前曾看到过，对于任意元 x 二次泛函 (Ax, x) 都是实的这一条件，乃是自共軛运算子的特征。

設运算子 A 具有下面性質，即对于任意元 x，$(Ax, x)=0$。由 (44) 可知如此則 $(Ax, y)=0$，对于任意 x, y 都成立。但显然如果 A 是零运算子，則双綫性泛函 (Ax, y) 具有这性質，而注意定理 7 中所指出的唯一性，可知如果对于任意元 x，$(Ax, x)=0$ 都成立，則 A 必是零运算子。由此直接可知，如果 A 与 B 对于任意元 x 都滿足 $(Ax, x)=(Bx, x)$，則 $A=B$。

100. 自共軛运算子的界 設 A 是自共軛运算子。注意 (6) 及 (33)，可以写成：$|(Ax, x)|\leqslant n_A\|x\|^2$，而如果取 x 使 $\|x\|=1$，則得 $|(Ax, x)|\leqslant n_A$。如此，如果取一切可能的規格化的元 x，就是說取滿足 $\|x\|=1$ 的一切元，則实数 (Ax, x) 的集合上下都有界。用 m 表示这集合的下确界，M 表示这集合的上确界：

$$m=\inf_{\|x\|=1}(Ax, x);\quad M=\sup_{\|x\|=1}(Ax, x)。\tag{45}$$

数 m 与 M 通常叫做自共軛运算子 A 的界。依确界的定义，我們可以写出不等式

$$m\leqslant(Ax, x)\leqslant M \text{ 在 } \|x\|=1 \text{ 的条件下成立。}\tag{46}$$

留意常数因子可以从数积中提出来，对于具有任意范数的元 x 都可以写出下面的不等式：

$$m\|x\|^2\leqslant(Ax, x)\leqslant M\|x\|^2。\tag{46$_1$}$$

事实上，运算子的范数 n_A 可以用特別簡單的方式由界 m 及 M 表示出来，即下面定理成立：

定理 8. 范数 n_A 等于两数 $|m|$ 及 $|M|$ 中的較大者。

首先証明下面的簡單輔助定理。

輔助定理　n_A 是在 $\|x\|=1$ 及 $\|y\|=1$ 的条件下 $|(Ax, y)|$ 的上确界。

由不等式

$$|(Ax, y)| \leqslant \|Ax\| \cdot \|y\| \leqslant n_A \|x\| \cdot \|y\| \tag{47}$$

可得在 $\|x\|=\|y\|=1$ 的条件下 $|(Ax, y)| \leqslant n_A$。另一方面，如果在数积 (Ax, y) 之中把 y 換成規格化的元 $Ax:\|Ax\|$，那末可得 $(Ax, y)=\|Ax\|$。由范数的定义可以适当地选择規格化元 x，使 $\|Ax\|$ 与 n_A 相差任意小。由不等式 $|(Ax, y)| \leqslant n_A$ 及剛才所説的就完全証明了輔助定理。

現在轉而証明定理 8 。用字母 μ 表示数 $|m|$ 及 $|M|$ 中間的較大者。数 μ 于是等于在 $\|x\|=1$ 的条件下 $|(Ax, x)|$ 的上确界：

$$\mu = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|, \tag{48}$$

而我們可以写成

$$|(Ax, x)| \leqslant \mu \|x\|^2。 \tag{49}$$

写出显然的恒等式

$$(A(x+y), x+y)-(A(x-y), x-y)=4R(Ax, y)。 \tag{50}$$

留意 (49)，对于左边的絕对値可得下面的估計：

$$|(A(x+y), x+y)-(A(x-y), x-y)| \leqslant$$
$$\leqslant \mu\|x+y\|^2+\mu\|x-y\|^2=2\mu(\|x\|^2+\|y\|^2)。$$

留意 (50)，可以写成

$$2|R(Ax, y)| \leqslant \mu(\|x\|^2+\|y\|^2)。$$

与証定理 3 时所用的推理一样，可以把这不等式換成更强的不等式：

$$2|(Ax, y)| \leqslant \mu(\|x\|^2+\|y\|^2)。$$

令 $\|x\|=\|y\|=1$，可得

$$|(Ax, y)| \leqslant \mu \text{ 对于凡 } \|x\|=\|y\|=1 \text{ 成立。} \tag{51}$$

另一方面，依輔助定理，n_A 是在 $\|x\|=\|y\|=1$ 的条件下不等式(51)的左边的上确界。由此可知 $n_A\leqslant\mu$。現在証明反方向的不等式。依(47)：

$$\text{当 } \|x\|=1 \text{ 时} \quad |(Ax,\, x)|\leqslant n_A,$$

而依 (48)，由此得 $\mu\leqslant n_A$。于是定理 8 証明了。再介紹几个新概念。

定义 自共軛运算子 A 叫做正运算子，是指与它相应的二次泛函 $(Ax,\, x)\geqslant 0$。正运算子的特征是不等式 $m\geqslant 0$，就是說，它的下界是非負的。此外，我們說自共軛运算子 A 大于自共軛运算子 B，是指 A 与 B 并不重合并且 $A-B$ 是正运算子。我們用 $A>B$ 表示。完全相似地可以定义負运算子。在 n 維空間的情形中，自共軛矩陣叫做正的，是指与它相应的埃尔密特式

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i\bar{x}_k \quad (a_{ki}=\bar{a}_{ik})$$

只取非負数值。矩陣是正的与下面事实同效，即其固有值是非負的。如果 $(Ax,\, x)$ 对于 x 的不同选擇变号，則自共軛运算子 A 既不能叫做正的，也不能叫做負的。在有穷維空間的情形中，这恰是具有不同符号的固有值的自共軛矩陣。

定理 9. 如果 A 是自共軛运算子，那末 A^2 是正运算子。如果 A 是任意綫性运算子，那末运算子 AA^* 及 A^*A 是自共軛的正运算子。

第一結論直接由下面公式得出：

$$(A^2x,\, x)=(Ax,\, Ax)=\|Ax\|^2\geqslant 0,$$

而第二結論由公式

$$(AA^*x,\, x)=(A^*x,\, A^*x)=\|A^*x\|^2\geqslant 0, \tag{52$_1$}$$

$$(A^*Ax,\, x)=(Ax,\, Ax)=\|Ax\|^2\geqslant 0, \tag{52$_2$}$$

及定理 6 得出。

101. 逆运算子 有一在运算子中很重要的概念，就是逆运算子(比較卷 III 中的逆矩陣)。这概念可以用本質上不同的方式来定义。本节的目的是給出逆运算子的不同定义并解釋其涵义。

定义 我們說，綫性运算子 A 有有界的逆运算子，是指存在一有界运算子 B，滿足

$$AB=BA=E, \tag{53}$$

而其中 E 是不变映像的运算子，就是説 $Ex=x$。不难証明有界逆运算子 B 只能是唯一的。事实上，如果 $AC=E$，那末在左边乘以 B，应用(53)，并留意 $BE=B$ 及 $EC=C$，可得 $B=C$。上面定义的运算子 B 通常表示成 A^{-1}，于是有

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E。 \tag{54}$$

写出公式

$$y=Ax \quad (x\in H)。 \tag{55}$$

两边都乘以 A^{-1}，則得

$$x=A^{-1}y。 \tag{56}$$

由此可知，如果 A 有有界逆运算子 A^{-1}，那末 A 生出由空間 H 到它自己本身之中的一个一对一的映像，就是說依(55)，对于任意元 x，必有一确定元 y 与之相应，而反之，任意元 $y\in H$ 必与一确定元 x 相应，而 x 由公式(56)决定。同样 A^{-1} 也把 H 一对一地映像到它自己之中。由 A 的分配性可得 A^{-1} 也是分配运算子，就是說 A^{-1} 是綫性运算子。由(54)直接可得

$$(A^{-1})^{-1}=A。 \tag{57}$$

可以举出逆运算子的更一般定义。首先注意，依一般綫性运算子 A 的分配性，由公式(55)定义的元 y 所組成的集合是一綫性簇，我們用 L_A 表示。现在举出为了使 H 中的元 x 与 L_A 中的元 y 間成立一一对应时运算子 A 所应有的性質。依公式(55)，H 中的任意元 x 必与 L_A 中的一个确定元 y 相应。如要反过来的关系

成立，必須 L_A 中的任意元 y 与 H 中一个确定元 x 相应。設 x_1 及 x_2 是 H 中两个不同元，而 y_1 及 y_2 是二者在 L_A 中的相应元：

$$y_1 = Ax_1; \quad y_2 = Ax_2。$$

相减可得

$$y_2 - y_1 = A(x_2 - x_1)。$$

如果 $y_2 = y_1$，就是說，H 中的不同元 x_1 及 x_2 与 L_A 中的同一元相应，那末我們得 $A(x_2 - x_1) = 0$，就是說方程

$$Ax = 0 \tag{58}$$

必須有异于零元的解。反之，如果方程 (58) 有异于零的解 x_0，那末不同的元 $x = x_0$ 及 $x = 0$ 与同一个元 $y = 0$ 相应。如此，为了使公式(55)决定 H 中的元 x 与 L_A 中的元 y 間的一一对应，必須而且只須方程(58)仅有等于零的解。此时在綫性簇 L_A 中定义了一个运算子 B，这运算子是 A 的逆运算子。它把 L_A 中的元 y 变换成 H 中的元 x，而 y 借公式 (55) 由 x 表示出来。这运算子簡称做 A 的逆运算子，以与上面定义的有界逆运算子示别。运算子 B 只定义于綫性簇 L_A 中，而 L_A 可能与 H 并不重合，并且我們无从断定运算子 B 是有界的。但由于 A 的分配性，可以断定 B 是綫性簇 L_A 上的分配运算子。仍用以前的記号 A^{-1} 表示 B，可以写成：$A^{-1}(Ax) = x$ 对于凡 $x \in H$ 都成立；而如果 $x \in L_A$，則 $A(A^{-1}x) = x$。設运算子 A 有有界逆运算子，而在等式 (54) 中取其共軛运算子：

$$(A^{-1})^* \cdot A^* = A^*(A^{-1})^* = E^* = E。$$

由此可得公式

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}。 \tag{59}$$

公式(53)要求有界运算子 B 既是 A 的左逆，又是它的右逆，而在这情形下我們叫它做有界逆运算子，并用 A^{-1} 表示它。現在考察左有界逆运算子及右有界逆运算子的問題。

我們說，运算子 A 有左有界逆运算子，而简称左逆，是指存在一个綫性运算子 B，滿足 $BA=E$。同样，如果 $AC=E$，那末 C 叫做右有界逆运算子。

定理 10. 如果 A 至少有一个左逆 B，至少有一个右逆 C，那末它只有一个左逆，也只有一个右逆，并且这两逆相重合，就是說有界逆运算子 A^{-1} 存在。

依条件 $BA=E$, $AC=E$，由此 $(BA)C=C$, $B(AC)=B$。上面两等式的右边相重合，因此 $B=C$，就是說凡左逆与凡右逆都相重合，因此只能有一个左逆，只能有一个右逆。

定理 11. 如果存在唯一的左逆，那末必存在右逆。如果存在唯一的右逆，那末必存在左逆。在这两种情形下两种逆都是唯一的，并且相重合(由于定理 10)。

現在証明定理的第一結論。設有唯一的左逆运算子 B，就是說 $BA=E$。从左边乘 A，得 $ABA=A$，即 $(AB-E)A=0$，而右边的 0 表示零运算子。在两边都加上 $BA=E$，可以写成 $(AB-E+B)A=E$。但依条件 B 是唯一的左逆，因此 $AB-E+B=B$，由此 $AB=E$，所以 B 也是右逆。

还应注意，如果 A 有两个不同的左逆运算子 B 及 C (或右逆)，那末必存在无穷多左逆运算子。事实上，如果 $BA=E$，而 $CA=E$，那末不难証明运算子 $B+a(C-B)$ 对于任意数 a 都是左逆：

$$(B+aC-aB)A=BA+aCA-aBA=E+aE-aE=E.$$

由上面結果可以想到有下面四种情形：

I. 存在唯一的左逆及右逆；

II. 既不存在左逆，也不存在右逆；

III. 存在无穷多左逆而沒有右逆；

IV. 存在无穷多右逆而沒有左逆。

下面将会看到，上面一切情形都确实可能發生。現在給出一

个簡單的理論鑒别法，以分别这些情形。考察自共軛（非負）运算子 A^*A 及 AA^*。由定理 9 可知这些运算子的下界（我們表做 $m(A^*A)$ 及 $m(AA^*)$）大于或等于零。設至少存在一个左逆：$BA=E$，而設 k 是 B 的范数。那末 $\|BAx\|=\|x\|$，而另一方面 $\|BAx\|\leqslant k\|Ax\|$，由此可知 $k\|Ax\|\geqslant\|x\|$，于是 $\|Ax\|\geqslant\frac{1}{k}\|x\|$。由公式 (52_2) 可知如此則 $(A^*Ax, x)\geqslant\frac{1}{k^2}\|x\|^2$，所以 $m(A^*A)\geqslant\frac{1}{k^2}$，就是說 $m(A^*A)>0$。現在証明：反之，如果 $m(A^*A)>0$，那末 A 必有有界左逆。下面我們将証明如果自共軛运算子 F 的下界是正的，那末 F 必有有界逆运算子 [105]。应用这結果于 $F=A^*A$ 上，可以看出必存在一有界运算子 D，滿足 $DA^*A=E$，就是說 $(DA^*)A=E$，由此可知 DA^* 是 A 的有界左逆。同样可証，为了至少存在一个有界右逆，必須且只須 $m(AA^*)>0$。

由这些推理直接可得：上面四种情形实現的必要且充分的条件乃是：

I. $m(A^*A)>0$ 而 $m(AA^*)>0$；

II. $m(A^*A)=0$ 而 $m(AA^*)=0$；

III. $m(A^*A)>0$ 而 $m(AA^*)=0$；

IV. $m(A^*A)=0$ 而 $m(AA^*)>0$。

注意如果 A 与 A^* 可交換（例如 $A=A^*$，就是說 A 是自共軛运算子的情形），那末 III 及 IV 不可能实現。留意公式 (52_1) 及 (52_2) 可以把第一情形的結果陈述如下：左右逆运算子存在的必要且充分的条件乃是存在一正数 l，使任意元 x 能滿足不等式 $\|Ax\|\geqslant l\|x\|$ 及 $\|A^*x\|\geqslant l\|x\|$。在以上所論的一切中，从沒有应用过运算子 B 及 C 的分配性。重要的只是它們定义于整个 H 之上，并且是有界的。在情形 I 中，如我們在上面所看到的，唯一的左逆及右逆运算子必然是綫性运算子。在情形 III 中有綫性运算子 $B=DA^*$，

它是左逆。但可能不分配的有界运算子是左逆。同样在情形 IV 中我們只考察綫性运算子。还要注意如果 $BA=E$，那末 $A^*B^*=E$，所以如果对于 A 情形 III 实现，那末对于 A^* 情形 IV 实现。

逆运算子在解方程 $Ax=y$（y 是已知，x 是未知元）时起着基本的作用。如果存在左逆运算子 B，那末把方程两边乘以 B，可得必然的等式 $x=By$，就是說在左逆运算子存在的假設下，如果有解，那末解必可表成 $x=By$ 的形式，因而是唯一的。如果存在右逆运算子 C，那末在方程 $Ax=y$ 中令 $x=Cy$，則显然方程可以满足，就是說右逆运算子的存在保証了解 $x=Cy$ 的存在。

102. 运算子的譜 在应用运算子論于数学分析中的最基本問題乃是解齐次方程

$$Ax=\lambda x, \tag{60}$$

就是

$$(A-\lambda E)x=0 \tag{60$_1$}$$

及非齐次方程

$$Ax=\lambda x+y, \tag{61}$$

就是

$$(A-\lambda E)x=y, \tag{61$_1$}$$

其中 x 是未知元，而 y 是已知元，λ 是参数。数 λ 叫做运算子 A 的固有值，如果齐次方程(60)有异于零元的解；这解叫做运算子 A 的与所說的那固有值相应的固有元。

如果 λ 是 A 的固有值，而我們把零元添入相应的固有元集合中去，(零元对于任意 λ 都满足齐次方程(60))，那末依齐次方程(61)的綫性及齐次性以及运算子 A 的連續性，可以断言，上述那固有元集合添加上零元組成一子空間。我們叫它做与上述固有值相应的固有元子空間。

如果这固有元子空間維数 r 有穷，就是說如果屬于这子空間的綫性无关元的最大数且是有穷数 r，那末我們說相应固有值 λ 的秩或重复度等于 r。如果那固有元子空間的維数无穷，那末我

們說相应固有值的秩是无穷的。在自共軛运算子 A 的情形中下列定理成立：

定理 12. 自共軛运算子的固有値是实数，而与不相同固有値相应的固有元互相正交。

設 λ 是自共軛运算子 A 的固有値，而 x 是与它相应的固有元，并且不等于零元。把(60)两边从右乘以 x，可得

$$(Ax, x)=\lambda\|x\|^2。$$

既然 A 是自共軛的，上面等式的左边是实数，所以数 λ 也是实数。設 λ' 与 λ'' 是两个不同的固有値，而 x' 及 x'' 是与它們相应的固有元：

$$Ax'=\lambda'x'; \quad Ax''=\lambda''x''。$$

把等式的第一个从右边乘以 x''，第二个从左边乘以 x'，并把所得等式相減，可得

$$(Ax', x'')-(x', Ax'')=(\lambda'-\lambda'')(x', x'')。$$

依 A 的自共軛性，左边等于零，而 $\lambda'-\lambda''\neq 0$。所以 $(x', x'')=0$，于是定理証明了。

解非齐次方程 (61_1) 可归結为找 $A-\lambda E$ 的逆运算子 $(A-\lambda E)^{-1}$。如果 λ 是运算子 A 的固有値，那末齐次方程 (60_1) 有异于零的解，而依[101]中所講的，逆运算子 $(A-\lambda E)^{-1}$ 不存在。如果 λ 不是运算子 A 的固有値，那末逆运算子 $(A-\lambda E)^{-1}$ 存在，但它可能是有界逆运算子或仅仅是逆运算子。注意在这里参数 λ 可以是任意复数。现在叙述下面的定义。

定义 値 λ 或点 λ（复数平面上的点）叫做运算子 A 的正則点，是指运算子 $A-\lambda E$ 具有有界逆运算子：

$$R_\lambda=(A-\lambda E)^{-1}, \tag{62}$$

而对于一切正則点 λ 定义的这个綫性运算子 R_λ 叫做运算子 A 的豫解运算子。所謂运算子 A 的譜，是指凡不是运算子 A 的正則点

的一切点 λ 集合。

由上面所說的，凡运算子 A 的固有値必屬于其譜。下面將看到，不是固有值的数值 λ 也可能屬于譜。

如果 λ 是正則点，那对于任意預定的元 y，非齐次方程 (61_1) 必有唯一解，而这解由公式

$$x=(A-\lambda E)^{-1}y \tag{63}$$

定出。如果 λ 不是正則点，并不等于运算子 A 的任意固有値，那末如果 y 屬于綫性簇 $L_{A-\lambda E}$（我們簡單地用 M_λ 表示），方程 (61_1) 仍有唯一解。这綫性簇是由凡作

$$y=(A-\lambda E)x \quad (x\in H), \tag{64}$$

形式的元 y 所組成，而上式中 x 遍表全 H 中的元。現在証明下面的簡單定理。

定理 13. M_λ 中的元与方程 $(A^*-\bar{\lambda}E)z=0$ 的一切解相正交，就是說，M_λ 中的元与运算子 A^* 的固有値 $\bar{\lambda}$ 相应的一切固有元相正交（如果这种元存在）。

定理的結論直接由显然的等式

$$((A-\lambda E)x,\ z)=(x,\ (A^*-\bar{\lambda}E)z)$$

得出。如果 z 是方程 $(A^*-\bar{\lambda}E)z=0$ 的解，那末对于任意的 x，上面的数积都等于零，就是說 $(A-\lambda E)x\perp z$。还要注意，如果 A 是自共軛运算子，而 λ 是其固有値（这値是实数），那末由所証明的可知，凡 M_λ 中的元与同这固有値 λ 相应的 A 的固有元相正交。在下段中將証明关于自共軛运算子的譜的特征的几个定理。

103. 自共軛运算子的譜　在本节及下节中將只考察自共軛运算子。

定理 14. 如果 λ 不是自共軛运算子 A 的固有値，那末公式 (64) 所定义的綫性簇 M_λ 在 H 中到处稠密。

用归謬法証明。設綫性簇 M_λ 在 H 中不到处稠密，就是說

M_λ 的閉包乃是与 H 不同的一个子空間。如此，依定理 3，必存在一矢量 x_0，不等于零元，并与上面的子空間相正交，因此与 M_λ 也相正交，就是說，对于 H 中的任意 x，$((A-\lambda E)x, x_0)=0$，而应用 A 的自共轭性，$(x, (A-\bar{\lambda}E)x_0)=0$ 对于 H 中的 x 都成立。令 $x=Ax_0-\bar{\lambda}x_0$，則 $\|Ax_0-\bar{\lambda}x_0\|=0$，就是說 $Ax_0=\bar{\lambda}x_0$。如果 λ 是实数，那末 $\bar{\lambda}=\lambda$，所以 λ 是运算子 A 的固有值，这与定理的条件相冲突。如果 λ 是复数，那末由等式 $Ax_0=\bar{\lambda}x_0$ 可知自共轭运算子 A 有非实数的固有值 $\bar{\lambda}$，而这也不可能，于是定理証明了。注意如果 λ 是正則点，則綫性簇 M_λ 与 H 重合。这由正則点的定义可以直接得出。如此定理的結論乃是說，如果 λ 屬于譜，但又非固有值，那末綫性簇 M_λ 在 H 中到处稠密。

定理15. λ 是自共轭运算子 A 的正則点的必要且充分的条件乃是：存在一正数 p，使凡 H 中的 x 滿足不等式

$$\|(A-\lambda E)x\|\geqslant p\|x\|。\tag{65}$$

如果 m 与 M 是 A 的界，則凡在区間 $[m, M]$ 外的实数及非实数 λ 都是正則点。

先証明条件(65)的必要性。設 λ 是正則点。那末有界逆运算子(62)必存在。用 q 表示它的范数，則

$$\|(A-\lambda E)^{-1}y\|\leqslant q\|y\|,$$

而在这式中如令 $y=(A-\lambda E)x$，而令 $p=\dfrac{1}{q}$，則得不等式(65)。再証明条件(65)的充分性。由这条件首先可知 λ 不是固有值，于是在定理 14 中定义的綫性簇在 H 中到处稠密。我們現在証明它是閉的，从而与 H 重合。設元 $y_n=(A-\lambda E)x_n$ 屬于 M_λ 而 $y_n\to y$。我們要証明 $y\in M_\lambda$。依(65)，可知 $\|y_n-y_m\|\geqslant p\|x_n-x_m\|$。序列 y_n 自收斂，而依上面的不等式，可知序列 x_n 自收斂，就是說必有一元 x 存在，使 $x_n\to x$。由公式 $y_n=(A-\lambda E)x_n$ 可知 $y_n\to y=$

$=(A-\lambda E)x$，从而 $y\in M_\lambda$。因为綫性族 M_λ 与 H 重合，运算子 $(A-\lambda E)^{-1}$ 是 $A-\lambda E$ 的逆，并定义于整个 H 上。为了証明 λ 是正則点，还应証明运算子 $(A-\lambda E)^{-1}$ 是有界的。在条件 (65) 中令 $x=(A-\lambda E)^{-1}y$，則得

$$\|(A-\lambda E)^{-1}y\|\leqslant\frac{1}{p}\|y\|,$$

由此可知 $(A-\lambda E)^{-1}$ 是有界的，而定理的第一部分完全証明了。

設 $\lambda=\sigma+\tau i$，而 $\tau\neq 0$。令 $(A-\lambda E)x=y$，可以写成

$$((A-\lambda E)x,\ x)=(y,\ x),$$

而
$$((A-\bar{\lambda}E)x,\ x)=(x,\ (A-\lambda E)x)=(x,\ y)。$$

把第二式从第一式减去，得

$$(\bar{\lambda}-\lambda)(x,\ x)=(y,\ x)-(x,\ y),$$

即
$$2|\tau|\,\|x\|^2\leqslant|(y,\ x)|+|(x,\ y)|,$$

而应用不等式(6)，可得不等式

$$2|\tau|\,\|x\|\leqslant 2\|y\|,$$

就是説

$$\|(A-\lambda E)x\|\geqslant|\tau|\,\|x\|\quad(\lambda=\sigma+\tau i)。$$

令 $p=|\tau|$ 就可得不等式 (65)，如此凡非实数 λ 都是正則点。現在設 λ 是实数，但位于区間 $[m,\ M]$ 之外。例如設 $\lambda>M$，我們要証明条件(65)在这情形下也滿足。我們可以写成

$$((A-\lambda E)x,\ x)=(Ax,\ x)-\lambda\|x\|^2,$$

$$((A-\lambda E)x,\ x)=[(Ax,\ x)-M\|x\|^2]-(\lambda-M)\|x\|^2。$$

由运算子 A 的上界 M 的定义可知在方括号内的差值是非正的。此外，依所設 $\lambda>M$，于是由上式可得不等式

$$|((A-\lambda E)x,\ x)|\geqslant(\lambda-M)\|x\|^2。$$

另一方面，不等式

$$|((A-\lambda E)x,\ x)|\leqslant\|(A-\lambda E)x\|\cdot\|x\|$$

成立。由上面两不等式可得

$$\|(A-\lambda E)x\| \geqslant (\lambda-M)\|x\|,$$

于是証明了在 $\lambda > M$ 的条件下条件 (65) 满足。注意如果在条件 (65) 中取规格化元 x，那末可以把它写成下面形式：

$$\|(A-\lambda E)x\| \geqslant p \quad (\|x\|=1)。 \tag{66}$$

由剛才証明了的定理可直接得出下面的推論：

系 1. 如果 λ 屬于譜，則存在一序列的规格化元 x_n，使 $\|(A-\lambda E)x_n\| \to 0$。

事实上，如果这样的序列并不存在，那末必存在一正数 p，使条件(66)满足，但如此則 λ 是正則点。注意如果 λ 是固有值，則我們可以取同一个元做元 x_n，就是說取规格化的固有元 x_0。如此則 $(A-\lambda E)x_n=0$ 对于一切 n 都成立。如果 λ 屬于譜，但不是固有值，那末在系中所說的一切 $(A-\lambda E)x_n$ 显然不等于零。

系 2. 如果自共軛运算子 A 的下界是正的，那末 $\lambda=0$ 位于区間 $[m, M]$ 之外，而 A 有有界逆运算子。

在[101]中曾用过这点。

***104.* 运算子序列** 現在介紹关于运算子序列極限的概念。

定义 我們說，綫性运算子序列 A_m 有極限，是指下面两条件满足：(1)对于任意元 x，元序列 A_mx 有極限；(2)运算子 A_m 的范数在上面由同一数所界，就是說存在一正数 L，使一切 m 都满足不等式 $n_{A_m} \leqslant L$。

可以証明第二条件是第一条件的推論。現在并不論其証明，而在下面不仅設第一条件满足，并設第二条件也满足。元 A_mx 的極限用 Ax 表示，就是說 $A_mx \Rightarrow Ax$。注意由运算子 A_m 的分配性可得極限运算子 A 的分配性，而由不等式 $\|A_mx\| \leqslant L\|x\|$ 可知，取極限值时 $\|Ax\| \leqslant L\|x\|$，因此極限运算子 A 不仅是分配的，而且是有界的，就是說 A 是綫性运算子。我們用 $A_m \to A$ 表示"A 是

A_m 的極限"这一事实。

定理 16. 如果 A_m 是自共軛运算子而 $A_m \to A$，那末 A 也是自共軛运算子。如果 $a_m \to a$ 而 $A_m \to A$，則 $a_m A_m \to aA$。如果 $A_m \to A$ 而 $B_m \to B$，則 $A_m + B_m \to A + B$，而 $A_m B_m \to AB$。

如果 A_m 是自共軛运算子，那末 $(A_m x, x)$ 对于任意 x 都是实数。取極限可知对于任意 x，(Ax, x) 也是实数，因此 A 是自共軛运算子。現在証明关于积的極限的結論。首先注意，如果 A_m 的范数为数 L 所界，而 B_m 的范數为數 M 所界，那末 $A_m B_m$ 的范数为数 LM 所界。剩下的乃是証明对于任何元 x，$A_m B_m x \Rightarrow ABx$。証明分做两阶段。首先証明 $A_m Bx \Rightarrow ABx$，然后証明 $A_m B_m x \Rightarrow ABx$。第一結論直接由下面公式可以得出：

$$A_m Bx = A_m(Bx) \to A(Bx) = ABx,$$

因为序列 A_m 收斂于 A。为了証明第二結論，首先写出

$$A_m B_m x = A_m Bx - A_m(B - B_m)x_{\circ}$$

右面的第一項依上面証过的趋向于 ABx，而剩下的乃是要証明第二項趋向于零元。依范數的定义，

$$\|A_m(B - B_m)x\| \leqslant n_{A_m} \|(B - B_m)x\| \leqslant L\|Bx - B_m x\|_{\circ} \tag{67}$$

但因为 $B_m \to B$，可知 $\|Bx - B_m x\| \to 0$，于是不等式 (67) 直接証明了我們的結論。

注 有时我們說，綫性运算子序列 A_m 依范数趋向于綫性运算子 A，是指运算子 $A - A_m$ 的范数 n_{A-A_m} 当 $m \to \infty$ 时趋向于零。由公式 $A_m = A - (A - A_m)$ 可知 $n_{A_m} \leqslant n_A + n_{A-A_m}$，如此对于任意 m，范数 n_{A_m} 为同一数所界，因为依条件 $n_{A-A_m} \to 0$。又因为 $\|Ax - A_m x\| \leqslant n_{A-A_m} \|x\|$，由此可知 $A_m x - Ax \Rightarrow 0$ 对于任意 x 成立。如此，如果运算子序列 A_m 依范數收斂于运算子 A，那末它依上面定义的意义也收斂于 A。

105. 投影运算子 現在我們要研究一种特殊的运算子，这就

是投影运算子。設 L 是某一子空間。依定理 3，H 中任意元可以唯一地表示成 $x=y+z$ 的形式，而 $y\in L$，$z\perp L$。把元 x 映像于其投影 y 的运算子叫做在子空間 L 中的投影运算子。用記号 P_L 表示它：

$$y=P_L x。\tag{68}$$

在下面將摒除一种无关重要的情形于討論之外，即子空間 L 是由零元組成的情形。如此則 P_L 是零运算子，就是說对于任意元 x，$P_L x=0$。还要注意，如果 L 是整个空間 H，那末 P_H 是不变映像运算子，就是說对于任意元 x，$P_H x=x$，于是 $P_H=E$。

定理 17. 投影运算子 P_L 是自共軛运算子，其范数等于1，并满足关系

$$P_L^2=P_L。\tag{69}$$

取 H 中两个元 x_1 及 x_2，并写出它們依定理 3 的分解式来：$x_1=y_1+z_1$，$x_2=y_2+z_2$。这里 y_1 及 $y_2\in L$，而 z_1 及 $z_2\perp L$。相加可得 $x_1+x_2=(y_1+y_2)+(z_1+z_2)$，而 $y_1+y_2\in L$，$z_1+z_2\perp L$。如此可以写成：$P_L(x_1+x_2)=y_1+y_2=P_L x_1+P_L x_2$。同样可以証明 $P_L(ax)=aP_L x$，所以运算子 P_L 是分配的。現在証明它是有界的，而其范数等于 1。如果 $x\in L$，則 $P_L x=x$，因此 $\|P_L x\|=\|x\|$。如果 x 不屬于 L，那末由于它的分解式 $x=y+z\ (z\neq 0)$ 及畢达哥拉定理 $\|x\|^2=\|y\|^2+\|z\|^2$，可知 $\|y\|<\|x\|$，就是說 $\|P_L x\|<\|x\|$。由上面的推理直接可知 P_L 的范数等于 1。剩下的乃是証明 P_L 是自共軛运算子，及公式(69)。設 x_1 及 x_2 是 H 中两个元，而 $x_1=y_1+z_1$，$x_2=y_2+z_2$ 是它們依定理 3 的分解。作数积 $(P_L x_1, x_2)$，而依运算子 P_L 的定义，可知 $P_L x_1=y_1$，$P_L x_2=y_2$。既然 z_1 及 $z_2\perp L$，可以写成

$$(P_L x_1, x_2)=(P_L x_1, y_2+z_2)=(y_1, y_2)=(y_1, P_L x_2)=$$
$$=(y_1+z_1, P_L x_2)=(x_1, P_L x_2),$$

就是說 $(P_L x_1, x_2)=(x_1, P_L x_2)$,

由此可知 P_L 是自共軛运算子。公式(69)的証明很簡單。对于任意元 x, 元 $P_L x$ 屬于 L, 所以 $P_L(P_L x)=P_L x$。現在証明下面逆定理。

定理 18. 如果 A 是自共軛运算子, 幷滿足关系

$$A^2=A, \tag{70}$$

那末 A 是投影运算子 P_L, 而与它相应的子空間 L 乃是凡滿足公式 $y=Ax$ 的元 y, 其中 x 遍表空間 H 中的一切元。

当 x 遍表空間 H 中的元时, 凡由公式 $y=Ax$ 定义的元 y 的集合 L 是綫性的,这可由运算子的分配性得出。現在証明 L 是子空間。設 y_n 是 L 中的元序列, 而 $y_n \Rightarrow y$。必須証明 $y\in L$。注意 $y_n\in L$, 可以斷定存在元 x_n, 使 $y_n=Ax_n$, 而依 (70), $y_n=A(Ax_n)$, 就是說 $y_n=Ay_n$, 由此取極限, 幷利用运算子 A 的連續性, 可得 $y=Ay$, 就是說 $y\in L$。为了完成証明本定理, 只剩下証明元 $(x-Ax)$ 与 L 中任意元相正交, 就是說与 Az 这样的一切元相正交, 其中 z 是 H 中任意元。事实上,

$$(x-Ax, Az)=(x, Az)-(Ax, Az)。$$

依 A 的自共軛性, 可以把 A 由第一元 x 移到第二元 z 上去, 如此可得:

$$(x-Ax, Az)=(x, Az)-(x, A^2z),$$

而由(70)可知右边等于零, 就是說 $(x-Ax, Az)=0$, 而定理証明了。

再关于投影运算子作两点簡單的按語。由公式

$$(P_L x, x)=(P_L^2 x, x)=(P_L x, P_L x)=\|P_L x\|^2 \tag{71}$$

直接可知投影运算子是正运算子。用 $H-L$ 表与 L 相补的子空間。依定理 3, 凡元 x 可以唯一地表示成和 $x=y+z$ 的形式, 而 $y\in L$, $z\in H-L$。元 y 及 z 显然是 x 在 L 及 $H-L$ 中的投影。

如此依公式 $x=y+z$ 直接可得下面的等式：

$$E=P_L+P_{H-L},\quad P_{H-L}=E-P_L, \tag{72}$$

而 E 永远是表示不变映像运算子的。

設

$$x_1, x_2, x_3, \cdots \tag{73}$$

是一組有穷多或无穷多两两正交并規格化的元，而 a_k 是元 x 依組(73)的傅立叶系数。不难証明，运算子

$$Ax=\sum_k a_k x_k \tag{74}$$

是在子空間 L 中的投影运算子，而 L 是由元(73)組成的，就是說子空間 L 是由凡可以表成收斂級数

$$y=\sum_k c_k x_k$$

形式的元 y 所組成。如果(73)中的元数有穷，那末并沒有收斂与否的問題。在可分性的条件下，在这种子空間 L 中可以取一閉的規格化正交組 (73)，而运算子(74)可以表現成在这子空間中的投影运算子。在下面，为了簡便起見，簡称投影运算子为投影。

106. 子空間的运算 在研究投影之前，首先提及几个与子空間运算有关的新概念与事实。我們記得，两子空間 L_1 及 L_2 叫做相互正交的，乃是指 L_1 的任意元与 L_2 的任意元都相正交。設 L_1 及 L_2 是两个相互正交的子空間，而 L 是由凡可以表示成和

$$x=x_1+x_2,\quad x_1\in L_1,\quad x_2\in L_2 \tag{75}$$

形式的元 x 所組成的集合。元 x_1 显然是 x 在 L_1 中的投影，而元 x_2 是 x 在 L_2 中的投影。如此，元 x 表示成公式 (75) 的形式是唯一的。集合 L 是綫性簇。事实上，如果与分解式(75)同样，对于另一元 y 也有一分解式 $y=y_1+y_2$，而 $y_1\in L_1$，$y_2\in L_2$，那末 $x+$ $+y=(x_1+y_1)+(x_2+y_2)$，而 $x_1+y_1\in L_1$，$x_2+y_2\in L_2$。完全同样可以証明：如果 $x\in L$，那末 $ax\in L$。現在証明，綫性簇 L 是閉的，

就是說 L 是一子空間。設 $x_1^{(n)}$ 是 L_1 中的元序列，$x_2^{(n)}$ 是 L_2 中的元序列，而

$$x_1^{(n)}+x_2^{(n)}\Rightarrow z_{\circ} \tag{76}$$

应当証明 $z\in L$。注意投影 P_{L_1} 的連續性及 $P_{L_1}x_1^{(n)}=x_1^{(n)}$，$P_{L_1}x_2^{(n)}==0$ 等事实；則依(76)可知 $x_1^{(n)}\Rightarrow P_{L_1}z$，同样 $x_2^{(n)}\Rightarrow P_{L_2}z$。如此

$$x_1^{(n)}+x_1^{(n)}\Rightarrow P_{L_1}z+P_{L_2}z_{\circ}$$

与(76)比較可得

$$z=P_{L_1}z+P_{L_2}z,$$

由此可知 $z\in L$。这就是說，如果 L_1 及 L_2 是两个互相正交的子空間，那末凡可以用公式(75)表示出来的元 x 所組成的集合是一个子空間 L。这子空間 L 平常叫做子空間 L_1 及 L_2 的正交和，我們写做

$$L=L_1\dot{+}L_{2\circ} \tag{77}$$

还要注意，L 中任意元 x 依公式(75)的表示是唯一的。完全同样地可以討論任意有穷多个两两正交的子空間。設 $L_k(k=1,2,\cdots,m)$ 是两两正交的子空間。凡可以依公式

$$x=x_1+x_2+\cdots+x_m,\ x_k\in L_k\ (k=1,\cdots,m) \tag{78}$$

表示出来的元 x 所組成的集合是一子空間 L。这子空間 L 叫做子空間 L_k 的正交和，并写成

$$L=L_1\dot{+}L_2\dot{+}\cdots\dot{+}L_{m\circ} \tag{79}$$

L 中任意元 x 依公式(78)的表示式是唯一的。还要注意，依畢达哥拉定理，从公式(78)可得下面等式：

$$\|x\|^2=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\cdots+\|x_m\|^2{}_{\circ}$$

現在考察可数多两两正交的子空間：$L_1, L_2, \cdots$。設 x 是 H 中任意元，x_k 是其在 L_k 中的投影，就是說 $x_k=P_{L_k}x$。那末依(71)

$$(x_k,x)=(x_k,x_k)=\|x_k\|^2,$$

而由此，与在[95]中一样，可得等式

$$\left\| x-\sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2。\tag{80}$$

依左边的非負性可得貝色勒不等式：

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \leqslant \|x\|^2,\tag{81}$$

而注意畢达哥拉定理，可以把这不等式轉化成形式

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 \leqslant \|x\|^2。\tag{82}$$

当 n 增加时，公式(80)的右边显然不增加，因而左边也必如此。設 L 是凡能使公式(80)两边于 n 无限增加时趋近于零的元 x 所組成的集合。关于集合 L 中的元，其特征是下面两等式：

$$x=\sum_{k=1}^{\infty} x_k,\tag{83}$$

$$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2。\tag{84}$$

現在証明 L 是子空間。設元 x 及 y 屬于 L，而 x_k 及 y_k 各是它們在 L_k 中的投影。用公式(9)可写出不等式

$$\left\| (x+y)-\sum_{k=1}^{n} (x_k+y_k) \right\|^2 \leqslant 2\left[\left\| x-\sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 + \left\| y-\sum_{k=1}^{n} y_k \right\|^2 \right]。$$

注意 x 及 $y \in L$，可知这不等式的右边当 n 无限增加时趋向于零，所以左边也如此，由此可知 $x+y \in L$。同样可以証明如果 $x \in L$，而 a 是复数，則 $ax \in L$。如此集合 L 是綫性簇。剩下的乃是要証明 L 是閉的。設 $x^{(n)}$ 是屬于 L 的元序列，而 $x^{(n)} \Rightarrow x$。必須証明 $x \in L$。用 x_k 及 $x_k^{(n)}$ 各表 x 及 $x^{(n)}$ 在 L_k 中的投影，而为写法簡單起見令

$$s_m(x^{(n)})=\sum_{k=1}^{m} x_k^{(n)}; \quad s_m(x)=\sum_{k=1}^{m} x_k。$$

必須証明当 m 无限地增加时 $x-s_m(x) \Rightarrow 0$。由公式

$$x-s_m(x)=(x-x^{(n)})+(x^{(n)}-s_m(x^{(n)}))+(s_m(x^{(n)})-s_m(x))$$

可得

$$\|x-s_m(x)\|\leqslant\|x-x^{(n)}\|+\|x^{(n)}-s_m(x^{(n)})\|+\|s_m(x^{(n)})-s_m(x)\|。\tag{85}$$

注意 $x^{(n)}\Rightarrow x$，可固定 n 値使 $\|x-x^{(n)}\|\leqslant\varepsilon$，其中 ε 是預定的正数。又因为 $s_m(x^{(n)})-s_m(x)=s_m(x^{(n)}-x)$ 是元 $x^{(n)}-x$ 在子空間 $L_1, L_2, \cdots, L_m$ 中投影之和。注意不等式(82)可知 $\|s_m(x^{(n)})-s_m(x)\|^2\leqslant\leqslant\|x^{(n)}-x\|^2\leqslant\varepsilon^2$，于是由不等式(85)可得不等式

$$\|x-s_m(x)\|\leqslant 2\varepsilon+\|x^{(n)}-s_m(x^{(n)})\|。$$

注意 n 旣然已經固定了，而元 $x^{(n)}$ 屬于 L，可知对于一切足够大的 m 值，$\|x^{(n)}-s_m(x^{(n)})\|\leqslant\varepsilon$，所以 $\|x-s_m(x)\|\leqslant 3\varepsilon$，就是說旣然 ε 是任意的，当 $m\to\infty$ 时 $s_m(x)\Rightarrow x$。如此証明了 L 是子空間。这子空間叫做子空間 L_k 的正交和，而与(79)相类可以写成

$$L=L_1\dotplus L_2\dotplus L_3\dotplus\cdots。\tag{86}$$

L 中任意元 x 依公式(83)的表示是唯一的，因为元 x_k 必須是 x 在 L_k 中的投影。

我們說，子空間 M 是子空間 L 的部分，是指凡 M 中的元也出現于 L 中。这时所謂子空間差 $L-M$ 是指凡 L 中与 M 正交的元所組成的集合。这集合显然是子空間。如果我們表示成 $L-M==M_1$，那末依定理 3，可以写成 $L=M\dotplus M_1$，而子空間 M 及 M_1 是在子空間 L 中互补的。所謂子空間的積 LM 是指凡旣在 L 中也在 M 中的元所組成的集合。不难証明这集合也是子空間。这積的定义显然可以适用于任意有穷多或无穷多个子空間。

107. 投影的性質 在本节中將論与加减乘法及取極限运算相关的投影的性質。所謂两个投影 P_L 及 P_M 是相互正交的，是指条件

$$P_LP_M=0\tag{87}$$

滿足，而在右边的記号 0 乃是表示零运算子。在公式(87)中取共

軛运算子，并留意(38)及投影运算子的自共軛性，可知与(87)同时必有公式

$$P_M P_L = 0 \tag{87_1}$$

成立。

定理 19. 为了投影运算子 P_L 及 P_M 是相互正交的，必須且只須子空間 L 及 M 是相互正交的。

先証明必要性。如果 L 及 M 不是相互正交的，那末在 M 中必有一元 x_0 存在，x_0 不与 L 正交。对于这元，可知 $P_M x_0 = x_0$，所以 $P_L(P_M x_0) = P_L x_0 \neq 0$，这与(87)相冲突。現在証明充分性。如果 $L \perp M$，那末对一切 x，$P_M x$ 与 L 相正交，所以 $P_L(P_M x) = 0$，就是說公式(87)是正确的。

定理 20. 为了和 $P_L + P_M$ 是投影运算子，必須且只須子空間 L 及 M 是相互正交的。如果这条件滿足，那末 $P_L + P_M$ 是在 $L + M$ 中的投影运算子。

先証明必要性。設 $P_L + P_M$ 是投影运算子。那末必然（依(69)）：

$$(P_L + P_M)(P_L + P_M) = P_L + P_M, \tag{88}$$

展开括号并注意 $P_L^2 = P_L$ 及 $P_M^2 = P_M$，可得

$$P_L P_M + P_M P_L = 0。 \tag{89}$$

从左边乘 P_L，則

$$P_L P_M + P_L P_M P_L = 0。 \tag{90}$$

把这等式从右边乘 P_L，可得 $P_L P_M P_L = 0$，而依(90)，可得公式 $P_L P_M = 0$，于是依定理 19，L 及 M 是相互正交的。現在証明充分性。如果 L 及 M 是相互正交的，那末依(87)及(87_1)，等式(89)滿足，因而等式(88)也成立，就是說 $(P_L + P_M)^2 = P_L + P_M$，而依定理 18，$P_L + P_M$ 是投影运算子。与这投影运算子相应的子空間可由下面公式定出：

$$y=(P_L+P_M)x=P_Lx+P_Mx, \tag{91}$$

而 x 遍表 H 中的元。$P_Lx\in L$, $P_Mx\in M$，所以依公式(91)定义的任意元 y 屬于 $L\dot{+}M$。反之，如果取屬于 $L\dot{+}M$ 的任意元 $u+v$，而 $u\in L$, $v\in M$，那末在 (91) 中令 $x=u+v$，可知 $y=u+v$。如此公式(91)事实上定义了子空間 $L\dot{+}M$，于是定理証明了。

我們說运算子 P_M 是运算子 P_L 的部分，是指条件

$$P_LP_M=P_M \tag{92}$$

滿足。在这公式中取共軛运算子，可得下面公式

$$P_MP_L=P_M。 \tag{92$_1$}$$

定理 21. 为了 P_M 是 P_L 的部分，必須且只須子空間 M 是子空間 L 的部分。这条件与下面的条件同效：卽对于凡 H 中的元 x，

$$\|P_Mx\|\leqslant\|P_Lx\|, \tag{93}$$

也就是

$$P_M\leqslant P_L。 \tag{93$_1$}$$

如果条件(92)滿足，取 M 中的一元 x_0，那末 $P_Mx_0=x_0$，而由 (92) 可得 $P_Lx_0=x_0$，因此 $x_0\in L$，所以 M 是 L 的部分。反之，如果 M 是 L 的部分，那末无論 x 如何，P_Mx 屬于 M，所以也屬于 L，因此 $P_L(P_Mx)=P_Mx$，就是說条件 (92) 滿足。这时，依公式 (92$_1$)，对于任意元 x 可以写成 $\|P_Mx\|=\|P_M(P_Lx)\|\leqslant\|P_Lx\|$，由此可得不等式(93)。現在証明反之，由不等式(93)可知 M 是 L 的部分。如果不然，那末必存在一元 x_0 屬于 M 而不屬于 L。对于这元，$\|P_Mx_0\|=\|x_0\|$，而 $\|P_Lx_0\|<\|x_0\|$ [105]，与(93)相冲突。最后，依(71)，不等式(93)可以写成下面形式：$(P_Lx, x)\geqslant(P_Mx, x)$，卽 $((P_L-P_M)x, x)\geqslant 0$，由此可知(93$_1$)与(93)同效；于是定理完全証明了。

定理 22. 为了差 P_L-P_M 是投影运算子，必須且只須 M 是

L 的部分。如果这条件满足，那末 P_L-P_M 是在 $L-M$ 中的投影运算子。

如果 P_L-P_M 是投影运算子，那末应当

$$(P_L-P_M)(P_L-P_M)=P_L-P_M, \tag{94}$$

而展开括号，可得

$$P_LP_M+P_MP_L=2P_M\text{。} \tag{94$_1$}$$

从左边乘 P_L，再从右边乘 P_L，可得两个等式：

$$P_LP_M+P_LP_MP_L=2P_LP_M,\quad P_LP_MP_L+P_MP_L=2P_MP_L,$$

由此可得 $P_LP_M=P_MP_L$，而依 (94_1)，可知 $P_LP_M=P_MP_L=P_M$，就是說条件(92)满足，而 M 是 L 的部分。反之，如果 M 是 L 的部分，就是說条件 (92) 满足，于是 (92_1) 也满足，由此可得公式 (94_1)，于是得公式(94)，因此依[98]及定理 18，P_L-P_M 是投影运算子。与它相应的子空間可由公式

$$y=(P_L-P_M)x=P_Lx-P_Mx \tag{95}$$

决定，其中 x 遍表 H 中的元。元 P_Lx 及 P_Mx 都屬于 L，因为依条件 M 是 L 的部分。如此公式(95)所决定的元屬于 L。現在証明元 y 与 M 正交。設 z 是 M 中的任意元。那末 $P_Mz=z$，而

$$(P_Lx-P_Mx,\ z)=(P_Lx-P_Mx,\ P_Mz)\text{。}$$

把 P_M 由左項移到右項，并应用条件(92_1)，可得

$$(P_Lx-P_Mx,\ z)=(P_Mx-P_Mx,\ z)=0,$$

就是說，事实上 $P_Lx-P_Mx\perp M$。如此公式 (95) 所决定的元 y 屬于 $L-M$。如果 u 是 $L-M$ 中的任意元，就是說 $u\in L$, $u\perp M$，那末 $y=P_Lu-P_Mu=P_Lu=u$，所以可知公式 (95) 恰恰定义了子空間 $L-M$，于是定理証明了。

定理 23. 为了积 P_LP_M 是投影运算子，必須而且只須 P_L 与 P_M 可交換，就是說

$$P_LP_M=P_MP_L\text{。} \tag{96}$$

如果这条件满足，那末 P_LP_M 是在子空間 LM 中的投影运算子。

条件(96)之所以必要，乃是因为依(38)*，P_LP_M 为自共轭的必要且充分的条件正是(96)。现在証明如果条件(96)满足，运算子 P_LP_M 满足条件(70)：

$$(P_LP_M)(P_LP_M)=P_L^2P_M^2=P_LP_M。$$

如此定理的第一部分証明了。如果 x 是 H 中的任意元，那末元

$$y=(P_LP_M)x=P_L(P_Mx)=P_M(P_Lx), \tag{97}$$

显然既属于 L 也属于 M，就是說 y 属于 LM。反之，如果取 LM 中的任意元 x_0，那末在公式(97)中令 $x=x_0$ 可得 $y=x_0$。如此公式(97)恰恰定义了子空間 LM，而定理完全証明了。

定理 24. 投影运算子的收斂序列的極限仍是投影运算子。

設 $P_n\to P$，而 P_n 是投影运算子。依定理 16，P 是自共轭运算子。在等式 $P_n^2=P_n$ 中取極限，可得等式 $P^2=P$，由定理 18 于是可知 P 是投影运算子。

定理 25. 凡投影运算子的單調序列必有極限。

首先考察投影运算子的不減序列：

$$P_1\leqslant P_2\leqslant P_3\leqslant\cdots。 \tag{98}$$

每个投影运算子 P_n 的范数等于1，而为了証明序列(98)的極限存在，只須証明对于任意元 x，P_nx 有極限就够了，就是說要証明：对于任意預定的正数 ε，必然有一数 N 存在，使

$$\text{当 } n>m>N \text{ 时，}\quad \|P_nx-P_mx\|\leqslant\varepsilon。 \tag{99}$$

依(98)及定理 21，

$$\|P_1x\|\leqslant\|P_2x\|\leqslant\|P_3x\|\leqslant\cdots,$$

而对于任意 n，$\|P_nx\|\leqslant\|x\|$。如此非負数的不減序列 $\|P_nx\|$ 有極限，而对于任意預定的正数 ε，必存在一数 N，使

$$\text{当 } n>m>N \text{ 时}\quad \|P_nx\|^2-\|P_mx\|^2\leqslant\varepsilon^2。$$

依(71)，可以把这不等式写成下面形式：当 $n>m>N$ 时，

$$((P_n-P_m)x, x)\leqslant\varepsilon^2。$$

因为 P_m 是 P_n 的部分，P_n-P_m 是投影运算子，而依上面不等式及(71)可得不等式(99)；定理于是証明了。注意依定理 24，序列(93)的極限运算子 P 是投影运算子，而在不等式 $((P_n-P_m)x, x)\geqslant 0$ 中令 $n\to\infty$ 而取極限，可得 $((P-P_m)x, x)\geqslant 0$，就是說 $P\geqslant P_m$。完全同样可証投影运算子的減序列也有極限，而这極限也是投影运算子。

定理 26. 如果 $L_k(k=1, 2, \cdots, m)$ 是两两正交的子空間，那末和

$$\sum_{k=1}^{m} P_{L_k}$$

乃是在子空間

$$L=L_1\dotplus L_2\dotplus\cdots\dotplus L_m$$

中的投影运算子。

重复使用定理 20 就可以証明本定理。对于可数多投影运算子也有同样的定理成立。

定理 27. 如果 $L_k(k=1, 2, \cdots)$ 是可数多个两两正交的子空間，那末无穷和

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_{L_k} \tag{100}$$

乃是在子空間

$$L=L_1\dotplus L_2\dotplus L_3\dotplus\cdots \tag{100_1}$$

中的投影运算子。

依定理 26，运算子序列

$$\sum_{k=1}^{n} P_{L_k} \tag{100_2}$$

乃是投影运算子的不减序列，所以依定理 25，无穷級数(100)有意义，而其和就是有穷和(100_2)的極限，也是一投影运算子。証明与

它相应的子空間是由公式(100_1)定义的，也很容易。

108. 主單位元分解。斯提勒杰斯积分　自共轭运算子的全部以后的發展都建立在一个一般公式上，而用这公式可以表示出任意有界自共轭运算子。为了建立这公式，首先必須介紹一新的重合概念。

定义　所謂主單位元的分解，是指一族依从实数参数λ的投影运算子$\mathscr{E}_\lambda$，而这族满足下面条件：(1)当λ增加时投影运算子$\mathscr{E}_\lambda$不减，就是說，如果$\mu>\lambda$，那末$\mathscr{E}_\mu\geqslant\mathscr{E}_\lambda$；(2)存在有穷値$\lambda=a$及$\lambda=b$，使$\mathscr{E}_a=0$及$\mathscr{E}_b=E$；(3)投影运算子$\mathscr{E}_\lambda$依参数$\lambda$从右边連續，就是說

$$\lim_{\lambda\to\lambda'+0}\mathscr{E}_\lambda=\mathscr{E}_{\lambda'}。\tag{101}$$

注意，依定理25对于任意値λ'，当λ由左边趋向于λ'时，或由右边趋向于λ'时，$\mathscr{E}_\lambda$的極限存在。这極限仍是投影运算子，用記号$\mathscr{E}_{\lambda'-0}$及$\mathscr{E}_{\lambda'+0}$表示。依(101)，$\mathscr{E}_{\lambda'+0}=\mathscr{E}_{\lambda'}$。我們說$\mathscr{E}_\lambda$在$\lambda$点处連續，是指$\mathscr{E}_\lambda=\mathscr{E}_{\lambda-0}$。条件(101)要求投影运算子$\mathscr{E}_\lambda$在每点是右連續的。添加这一条件是为了在$\mathscr{E}_\lambda$依$\lambda$的每个間断点处固定它的値。

我們指出主單位元分解$\mathscr{E}_\lambda$的某些性質。設m是凡使$\mathscr{E}_\lambda=0$的諸λ値的上确界，就是說

$$当\ \lambda<m\ 时\ \mathscr{E}_\lambda=0，而当\ \lambda>m\ 时\ \mathscr{E}_\lambda>0。\tag{102}$$

在$\lambda=m$点本身，如果$\mathscr{E}_\lambda$有跃变，則投影运算子$\mathscr{E}_\lambda$不等于零运算子。用M表示凡使$\mathscr{E}_\lambda=E$的値λ的下确界。由于$\mathscr{E}_\lambda$在右边連續，可知$\mathscr{E}_M=E$，而如此M的値可由下面条件决定：

$$当\ \lambda<M\ 时\ \mathscr{E}_\lambda<E；\quad 当\ \lambda\geqslant M\ 时\ \mathscr{E}_\lambda=E。\tag{103}$$

如果ε_0是任意固定正数，那末当λ在区間$[m-\varepsilon_0, M]$中变时，投影运算子$\mathscr{E}_\lambda$由0变到E。此外，依定理22，可知当$\mu>\lambda$

时，差 $\mathscr{E}_\mu-\mathscr{E}_\lambda$ 是投影运算子，而下面公式成立：

$$\mathscr{E}_\lambda\mathscr{E}_\mu=\mathscr{E}_\mu\mathscr{E}_\lambda=\mathscr{E}_\lambda \quad (\mu>\lambda)。\tag{104}$$

在差 $\mathscr{E}_\mu-\mathscr{E}_\lambda$ 中令数 λ 从左边趋向于 μ，可知 $\mathscr{E}_\mu-\mathscr{E}_{\mu-0}$ 是投影运算子。同样可証当 $\nu>\mu$ 时 $\mathscr{E}_\nu-\mathscr{E}_{\mu-0}$ 是投影运算子。介紹一种下面常用到的表示法。設 Δ 是一区間 $[\alpha,\beta]$。令

$$\Delta\mathscr{E}_\lambda=\mathscr{E}_\beta-\mathscr{E}_\alpha。\tag{105}$$

如果 Δ' 及 Δ'' 是两个无公共內点的区間，那末依(104)可知

$$\Delta'\mathscr{E}_\lambda\cdot\Delta''\mathscr{E}_\lambda=0 \quad (\Delta' \text{ 及 } \Delta''\text{无公共內点})。\tag{106}$$

应用定理 19 可知上面的等式与下面的关系同效：对于任意元 x 及 y，

$$\Delta'\mathscr{E}_\lambda x\perp\Delta''\mathscr{E}_\lambda y\,(x,\ y\text{ 是任意的}),\ (\Delta' \text{ 及 } \Delta'' \text{ 无公共內点})。\tag{107}$$

如果 Δ_0 是区間 Δ' 及 Δ'' 的公共部分，那末依(104)，

$$\Delta'\mathscr{E}_\lambda\cdot\Delta''\mathscr{E}_\lambda=\Delta_0\mathscr{E}_\lambda。\tag{108}$$

运算子可以相加，并可取运算子序列的極限[107]。这使我們可以借助主單位元分解 $\mathscr{E}_\lambda$ 来作任意連續函数的"斯提勒杰斯"积分。設在区間 $[m-\varepsilon_0,\ M]$ 上定义了一个連續函数 $f(\lambda)$，而 ε_0 是一固定的正数，函数 $f(\lambda)$ 可以是复数値的。把上面的区間分解成部分：

$$m-\varepsilon_0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_{n-1}<\lambda_n=M,\tag{109}$$

而对于区間 $[m-\varepsilon_0,\ M]$ 的这个分解 δ 作与它相应的"黎曼-斯提勒杰斯和"：

$$\sigma_\delta=\sum_{k=1}^{n} f(\nu_k)\,\Delta_k\mathscr{E}_\lambda=\sum_{k=1}^{n} f(\nu_k)\,(\mathscr{E}_{\lambda_k}-\mathscr{E}_{\lambda_{k-1}}),\tag{110}$$

而 ν_k 是区間 $[\lambda_{k-1},\ \lambda_k]$ 中的某值。和 σ_δ 是某一綫性运算子。用 η_δ 表示差 $\lambda_k-\lambda_{k-1}$ 中的最大者。下面的基本定理成立：

定理 28. 对于任意分解序列 δ_n，如果 $\eta_{\delta_n}\to 0$，那末运算子序列 σ_{δ_n} 有确定的極限。

首先証明两个輔助定理。

輔助定理 1. 如果 α 及 $\alpha_k\ (k=1, 2, \cdots, n)$ 是复数，而 $x=x_1+x_2+\cdots+x_n$，其中 x_k 是互相正交的元，那末下面的不等式成立：

$$\left\|\alpha x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\right\|\leqslant\delta\|x\|, \tag{111}$$

其中 δ 是數 $|\alpha-\alpha_k|$ 中的最大者。

因为
$$\alpha x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k=\sum_{k=1}^{n}(\alpha-\alpha_k)x_k,$$

由此依畢达哥拉定理得

$$\left\|\alpha x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\right\|^2=\sum_{k=1}^{n}|\alpha-\alpha_k|^2\|x_k\|^2\leqslant\delta^2\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2。 \tag{112}$$

又由畢达哥拉定理可得

$$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2,$$

而不等式(112)直接可以引出(111)来，于是輔助定理証明了。

輔助定理 2. 如果 δ 是区間 $[m-\varepsilon_0, M]$ 的分解(109)，而 δ' 是这区間的某另一个分解

$$m-\varepsilon_0=\lambda'_0<\lambda'_1<\lambda'_2<\cdots<\lambda'_{n'-1}<\lambda'_{n'}=M,$$

那末对于任意元 x，下面不等式成立：

$$\|\sigma_\delta x-\sigma_{\delta'}x\|\leqslant 2\omega\|x\|, \tag{113}$$

其中 ω 是函数 $f(\lambda)$ 在区間 $(\lambda_{k-1}, \lambda_k)$ 及 $(\lambda'_{k-1}, \lambda'_k)$ 中的最大振幅，就是說 ω 是満足下列条件的最小数：即如果 α 及 β 屬于同一区間 $(\lambda_{k-1}, \lambda_k)$ 或同一区間 $(\lambda'_{k-1}, \lambda'_k)$，那末

$$|f(\alpha)-f(\beta)|\leqslant\omega。 \tag{114}$$

作分解的积 $\delta\delta'$。由分解 δ 换成分解 $\delta\delta'$ 时，分解 δ 的每个部分区間 Δ_k 分解成有穷多个区間 $\Delta_k^{(s)}\ (s=1, 2, \cdots, m_k)$。如此，和

$$\sigma_\delta x=\sum_{k=1}^{n}f(\nu_k)\Delta_k\mathscr{E}_\lambda x \tag{115}$$

中的每項 $f(\nu_k)\Delta_k\mathscr{E}_\lambda x$ 换成和

$$\sum_{s=1}^{m_k} f(\nu_k^{(s)}) \Delta_k^{(s)} \mathscr{E}_\lambda x,$$

其中 $\nu_k^{(s)}$ 是区間 $\Delta_k^{(s)}$ 中的某值。諸值 ν_k 及 $\nu_k^{(s)}$ 屬于分解 δ 的同一区間 Δ_k，从而依(114)可得

$$|f(\nu_k)-f(\nu_k^{(s)})| \leqslant \omega \quad (s=1, 2, \cdots, m_k)。 \tag{116}$$

作差 $$\sigma_\delta x - \sigma_{\delta'\delta} x = \sum_{k=1}^{n} \left[f(\nu_k) \Delta_k \mathscr{E}_\lambda x - \sum_{s=1}^{m_k} f(\nu_k^{(s)}) \Delta_k^{(s)} \mathscr{E}_\lambda x \right]。$$

依(107)，对于不同的值 k，諸元 $\Delta_k \mathscr{E}_\lambda x$ 以及諸元 $\Delta_k^{(s)} \mathscr{E}_\lambda x$ 是互相正交的，而应用畢达哥拉定理，我們可以写成

$$\|\sigma_\delta x - \sigma_{\delta\delta'} x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left\| f(\nu_k) \Delta_k \mathscr{E}_\lambda x - \sum_{s=1}^{m_k} f(\nu_k^{(s)}) \Delta_k^{(s)} \mathscr{E}_\lambda x \right\|^2。 \tag{117}$$

此外，

$$\Delta_k \mathscr{E}_\lambda x = \sum_{s=1}^{m_k} \Delta_k^{(s)} \mathscr{E}_\lambda x,$$

而元 $\Delta_k^{(s)} \mathscr{E}_\lambda x (s=1, 2, \cdots, m_k)$ 也是互相正交的。应用輔助定理 1 并留意不等式(116)，可得

$$\left\| f(\nu_k) \Delta_k \mathscr{E}_\lambda x - \sum_{s=1}^{m_k} f(\nu_k^{(s)}) \Delta_k^{(s)} \mathscr{E}_\lambda x \right\| \leqslant \omega \|\Delta_k \mathscr{E}_\lambda x\|,$$

所以依(117)，

$$\|\sigma_\delta x - \sigma_{\delta\delta'} x\|^2 \leqslant \omega^2 \sum_{k=1}^{n} \|\Delta_k \mathscr{E}_\lambda x\|^2。 \tag{117$_1$}$$

留意 $\mathscr{E}_{m-\varepsilon_0}=0$, $\mathscr{E}_M=E$, 可知

$$x = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k \mathscr{E}_\lambda x, \tag{118}$$

而右边諸元是两两正交的。由畢达哥拉定理可知

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|\Delta_k \mathscr{E}_\lambda x\|^2, \tag{119}$$

于是不等式(117$_1$)可以写成下面形式：

$$\|\sigma_\delta x - \sigma_{\delta\delta'} x\| \leqslant \omega \|x\|。$$

完全同样可以証明

$$\|\sigma_{\delta'} x - \sigma_{\delta\delta'} x\| \leqslant \omega \|x\|,$$

而輔助定理的結論直接可由下面不等式得出：

$$\|\sigma_\delta x-\sigma_{\delta'}x\|\leqslant\|\sigma_\delta x-\sigma_{\delta\delta'}x\|+\|\sigma_{\delta'}x-\sigma_{\delta\delta'}x\|。$$

現在回来証明定理 28。首先我們必須証明諸运算子 σ_{δ_n} 的范数在上边为某一与 n 无关的数 l 所界，而其次，对于任意元 x，元序列 $\sigma_{\delta_n}x$ 有極限，就是說 $\sigma_{\delta_n}x\Rightarrow y$。如果我們証明这点，那末不难看出極限元 y 与序列 δ_n 的选择无关。事实上，如果 δ_n 及 δ'_n 是滿足定理中条件的两个分解序列，而 $\sigma_{\delta_n}x\Rightarrow y$，$\sigma_{\delta'_n}\Rightarrow y'$，那末分解序列 δ_1，δ'_1，δ_2，δ'_2，…也滿足定理的条件，因此元序列 $\sigma_{\delta_1}x$，$\sigma_{\delta'_1}x$，$\sigma_{\delta_2}x$，$\sigma_{\delta'_2}x$，… 也必有極限。由此直接可知 $y'=y$。

現在証明上面所說的两結論。在和 σ_δ 中出現的諸元 $\Delta_k\mathscr{E}_\lambda x$ 是两两正交的，于是依畢达哥拉定理有

$$\|\sigma_\delta x\|^2=\sum_{k=1}^n|f(\nu_k)|^2\|\Delta_k\mathscr{E}_\lambda x\|^2。\tag{120}$$

此外，連續函数 $f(\lambda)$ 依絕对値有界，就是說，存在一正数 p，使 $|f(\lambda)|\leqslant p$。由公式(120)可得下面不等式：

$$\|\sigma_\delta x\|^2\leqslant p^2\sum_{k=1}^n\|\Delta_k\mathscr{E}_\lambda x\|^2,$$

由此，依(119)，可知 $\|\sigma_\delta x\|\leqslant p\|x\|$，就是說，对于任意分解，运算子 σ_δ 的范数不超过 p。現在証明元序列 $\sigma_{\delta_n}x$ 对于任意元 x 都有極限。依定理中的条件，$f(\lambda)$ 在区間 $[m-\varepsilon_0, M]$ 上是一致連續的，所以对于任意預給的正数 ε，必存在一数 N，使当 $n>N$ 时，只要 λ' 与 λ'' 屬于分解 δ_n 的同一个部分区間，那末一定有

$$|f(\lambda')-f(\lambda'')|\leqslant\varepsilon。$$

应用輔助定理 2，可知下面不等式成立：

$$当\ n\ 与\ m>N\ 时，\quad\|\sigma_{\delta_n}x-\sigma_{\delta_m}x\|\leqslant2\varepsilon\|x\|,$$

就是說，序列 $\sigma_{\delta_n}x$ 自收斂，因此必趋向于某極限元，于是定理完全証明了。为了表示当无限地細分部分区間时运算子序列的極限，自然可以应用平常表示斯提勒杰斯积分的方法：

$$\lim \sum_{k=1}^{n} f(\nu_k)\Delta_k \mathscr{E}_\lambda = \int_{m-\varepsilon_0}^{M} f(\lambda)\, d\mathscr{E}_\lambda。\tag{121}$$

同样，为了表示当无限地細分部分区間时元序列 (115) 的極限元，可以应用下列表示法：

$$\lim \sum_{k=1}^{n} f(\nu_k)\Delta_k \mathscr{E}_\lambda x = \int_{m-\varepsilon_0}^{M} f(\lambda)\, d\mathscr{E}_\lambda x。\tag{122}$$

完全同样可以証明，对于区間 $[m-\varepsilon_0,\ M]$ 的任意部分区間 $[\alpha,\ \beta]$，相应积分

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\, d\mathscr{E}_\lambda \quad 或 \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\, d\mathscr{E}_\lambda x \tag{123}$$

也存在。注意，在区間 $[m-\varepsilon_0,\ M]$ 之外，运算子 $\mathscr{E}_\lambda$ 及元 $\mathscr{E}_\lambda x$ 都保持不变值，而由此在有穷区間 $[m-\varepsilon_0,\ M]$ 上所取的积分可以写成无穷区間上的积分：

$$\left.\begin{aligned}\int_{m-\varepsilon_0}^{M} f(\lambda)\, d\mathscr{E}_\lambda &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\mathscr{E}_\lambda;\\ \int_{m-\varepsilon_0}^{M} f(\lambda)\, d\mathscr{E}_\lambda x &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\mathscr{E}_\lambda x。\end{aligned}\right. \tag{124}$$

如果运算子 $\mathscr{E}_\lambda$ 在 $\lambda=m$ 点处的跃度存在，那末用 $\mathscr{E}_m$ 表示它，可以把上面的积分轉化成区間 $[m,\ M]$ 上的积分：

$$\left.\begin{aligned}\int_{m-\varepsilon_0}^{M} f(\lambda)\, d\mathscr{E}_\lambda &= f(m)\mathscr{E}_m + \int_{m}^{M} f(\lambda)\, d\mathscr{E}_\lambda;\\ \int_{m-\varepsilon_0}^{M} f(\lambda)\, d\mathscr{E}_\lambda x &= f(m)\mathscr{E}_m x + \int_{m}^{M} f(\lambda)\, d\mathscr{E}_\lambda x。\end{aligned}\right\} \tag{125}$$

由公式(120)直接可得：如果在 $[\alpha,\ \beta]$ 上 $|f(\lambda)| \leqslant p_1$，那末

$$\left\|\int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\, d\mathscr{E}_\lambda x\right\| \leqslant p_1 \|(\mathscr{E}_\beta - \mathscr{E}_\alpha) x\|。\tag{126}$$

在下面，将把下限 $(m-\varepsilon_0)$ 换成 m。如此写出来的在区間 $[m,\ M]$ 上的积分等于在区間 $[m-\varepsilon_0,\ M]$ 上的积分减去 $f(m)\mathscr{E}_m$ 或 $f(m)\mathscr{E}_m x$。

109. 自共軛运算子的譜函数　如果$f(\lambda)$是实値的，那末σ_δ既是投影运算子借实系数的一次組合，它必仍是自共軛运算子，而当无限地細分部分区間时σ_δ的極限也是自共軛运算子。令$f(\lambda)=\lambda$，可得一自共軛运算子A：

$$A=\int_m^M \lambda d\mathscr{E}_\lambda, \tag{127}$$

$$Ax=\int_m^M \lambda d\mathscr{E}_\lambda x。 \tag{128}$$

公式(127)乃是自共軛运算子的全部理論中的基本公式。我們之得到公式(127)，是由某主單位元分解$\mathscr{E}_\lambda$出發来做的。对于每一主單位元分解必有一依公式(127)做的相应自共軛运算子被定义出来。我們可以証明反定理。

定理 29. 对于任意預給的自共軛运算子A，必存在一主單位元分解$\mathscr{E}_\lambda$，使A由公式(127)表示出来。

这定理的証明相当复杂，为了不切断我們的叙述，我們把这証明放在本章末尾。下面将証明一公式，依这公式$\mathscr{E}_\lambda$可以由自共軛运算子A决定出来。由这公式可知对于不同的主單位元分解，必有不同的运算子A相应。依定理29，公式(127)表現出有界自共軛运算子的一般形式。如果在和(115)中令$f(\lambda)=\lambda$，并乘以元y，而后取極限，那末可得数积(Ax, y)表成斯提勒杰斯积分的形式：

$$(Ax, y)=\int_m^M \lambda d(\mathscr{E}_\lambda x, y)。 \tag{129}$$

如$\mathscr{E}_m$不等于零，那末右边必須了解做下面的和

$$m(\mathscr{E}_m x, y)+\int_m^M \lambda d(\mathscr{E}_\lambda x, y), \tag{129$_1$}$$

其中后一項积分乃是平常的斯提勒杰斯积分。我們可以取公式(129)代替公式(127)做为基础，因为运算子A由双線性泛函完全决定。我們記得，数积$(\mathscr{E}_\lambda x, y)$可以由四个形式为$(\mathscr{E}_\lambda z, z)=$

$=\|\mathscr{E}_\lambda x\|^2$ 的数积的一次式表示出来[99]

因为当 $\mu>\lambda$ 时 $\mathscr{E}_\mu\geqslant\mathscr{E}_\lambda$，当 λ 增加时 $\|\mathscr{E}_\lambda x\|^2$ 不减，如此，在微分号下的函数(一般說来是复数值的) $(\mathscr{E}_\lambda x, y)$ 是 λ 的一个囿变函数。如果令 $y=x$，那末可以把二次泛函表示成斯提勒杰斯积分的形式：

$$(Ax, x)=\int_m^M \lambda d(\mathscr{E}_\lambda x, x)。\tag{130}$$

在这情形下微分号下的函数 $(\mathscr{E}_\lambda x, x)=\|\mathscr{E}_\lambda x\|^2$ 乃是增函数。

投影运算子族 $\mathscr{E}_\lambda$ 平常叫做由公式(127)定义的自共轭运算子 A 的譜函数。我們証明数 m 与 M 恰好就是运算子 A 的两界（即在[102]中所定义的)。把二次泛函 (Ax, x) 写成下面形式：

$$(Ax, x)=m\|\mathscr{E}_m x\|^2+\int_m^M \lambda d\|\mathscr{E}_\lambda x\|^2。$$

在微分号下的乃是 λ 的一个不减函数。首先把 λ 换成 m，再换成 M，可得不等式

$$m\|\mathscr{E}_M x\|^2\leqslant(Ax, x)\leqslant m\|\mathscr{E}_m x\|^2+M[\|\mathscr{E}_M x\|^2-\|\mathscr{E}_m x\|^2],$$

而既然 $\mathscr{E}_M x=x$，可得不等式

$$m\|x\|^2\leqslant(Ax, x)\leqslant M\|x\|^2。$$

剩下的乃是証明 m 及 M 各是 $\|x\|=1$ 时 (Ax, x) 的下确界及上确界。例如証明 M 是上确界。如果 ε 是任意预定的正数，差 $\mathscr{E}_M-\mathscr{E}_{M-\varepsilon}=E-\mathscr{E}_{M-\varepsilon}$ 是投影运算子，并且不等于零运算子。設規格化元 x 屬于与这投影运算子相应的子空間。如此则 $(E-\mathscr{E}_{M-\varepsilon})x=x$，就是說 $\mathscr{E}_{M-\varepsilon}x=0$，因而当 $\lambda\leqslant M-\varepsilon$ 时 $\mathscr{E}_\lambda x=0$。于是在(130)中把 λ 换成 $(M-\varepsilon)$ 并令 $\|x\|=1$，可以写成：

$$(Ax, x)>(M-\varepsilon)\|(E-\mathscr{E}_{M-\varepsilon})x\|^2=(M-\varepsilon),$$

由此，既然 ε 是任意的，可知 M 是当 $\|x\|=1$ 时 (Ax, x) 的上确界。

再介紹一个公式。把等式

$$\sigma_\delta=\sum_{k=1}^n \nu_k\Delta_k\mathscr{E}_\lambda=\sum_{k=1}^n \nu_k(\mathscr{E}_{\lambda_k}-\mathscr{E}_{\lambda_{k-1}})\tag{131}$$

中两边都乘上$\mathscr{E}_\lambda$，并設λ是諸分割点λ_k中的一个。如此，依(104)，当$\lambda<\lambda_k$时$\mathscr{E}_\lambda\cdot\Delta_k\mathscr{E}_\lambda=\Delta_k\mathscr{E}_\lambda\cdot\mathscr{E}_\lambda=0$，而当$\lambda\geqslant\lambda_k$时$\mathscr{E}_\lambda\cdot\Delta_k\mathscr{E}_\lambda=$
$=\Delta_k\mathscr{E}_\lambda\cdot\mathscr{E}_\lambda=\Delta_k\mathscr{E}_\lambda$，由此可得

$$\mathscr{E}_\lambda\sigma_\delta=\sigma_\delta\mathscr{E}_\lambda=\sum_{\lambda_k<\lambda}\nu_k\Delta_k\mathscr{E}_\lambda,$$

取極限可得公式

$$\mathscr{E}_\lambda A=A\mathscr{E}_\lambda=\int_m^\lambda \lambda d\mathscr{E}_\lambda \quad (\lambda>m) \tag{132}$$

及关于双綫性泛函的相类公式：

$$(\mathscr{E}_\lambda Ax,\ y)=\int_m^\lambda \lambda d(\mathscr{E}_\lambda x,\ y)。 \tag{132$_1$}$$

110. 自共軛运算子的連續函数　如果A是由公式(127)定义的自共軛运算子，那末对于在区間$[m,\ M]$中連續的任意函数$f(\lambda)$可以借下面公式定义运算子$f(A)$：

$$f(A)=\int_m^M f(\lambda)d\mathscr{E}_\lambda。 \tag{133}$$

这在連續函数$f(\lambda)$与运算子$f(A)$間的对应乃是分配的，就是說与連續函数$c_1f_1(\lambda)+c_2f_2(\lambda)$相应的乃是运算子$c_1f_1(A)+c_2f_2(A)$。这可以直接由积分(133)对于$f(\lambda)$的分配性得出。此外，上面的对应是乘法的，就是說与函数$f_1(\lambda)f_2(\lambda)$对应的乃是运算子$f_1(A)f_2(A)$或与它相等的运算子$f_2(A)f_1(A)$。为了証明这層，作函数$f_1(\lambda)$及$f_2(\lambda)$的和σ_δ而取其积：

$$\sum_{k=1}^n f_1(\nu_k)\Delta_k\mathscr{E}_\lambda\cdot\sum_{k=1}^n f_2(\nu_k)\Delta_k\mathscr{E}_\lambda。$$

注意(106)及(108)，可以把上面的积表示成下面形式：

$$\sum_{k=1}^n f_1(\nu_k)\Delta_k\mathscr{E}_\lambda\cdot\sum_{k=1}^n f_2(\nu_k)\Delta_k\mathscr{E}_\lambda=\sum_{k=1}^n f_1(\nu_k)f_2(\nu_k)\Delta_k\mathscr{E}_\lambda, \tag{134}$$

而取極限，可得公式

$$\int_m^M f_1(\lambda)d\mathscr{E}_\lambda\cdot\int_m^M f_2(\lambda)d\mathscr{E}_\lambda=\int_m^M f_1(\lambda)f_2(\lambda)d\mathscr{E}_\lambda, \tag{134$_1$}$$

这正是所要証的。伴随着公式 (133) 也可以写出关于双綫性泛函及二次泛函的相应公式：

$$(f(A)x,\ y)=\int_m^M f(\lambda)d(\mathscr{E}_\lambda x,\ y);$$
$$(f(A)x,\ x)=\int_m^M f(\lambda)d\|\mathscr{E}_\lambda x\|^2. \tag{135}$$

此外，与公式(132)相类，还有公式

$$\mathscr{E}_\lambda f(A)=f(A)\mathscr{E}_\lambda=\int_m^\lambda f(\lambda)d\mathscr{E}_\lambda. \tag{132$_2$}$$

留意(134_1)，关于 A 的正整数幂可得下面公式：

$$A^n=\int_m^M \lambda^n d\mathscr{E}_\lambda \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \tag{136}$$

而关于多項式則

$$a_0A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_n=$$
$$=\int_m^M (a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n)d\mathscr{E}_\lambda. \tag{137}$$

在以前曾提到过，如果 $f(\lambda)$ 是实函数，那末运算子 σ_δ 是自共軛运算子，而 σ_δ 在極限，就是 $f(A)$，也是自共軛运算子。如果在区間 $[m,\ M]$ 上 $f(\lambda)\geqslant 0$，那末依公式(135)，运算子 $f(A)$ 是正的。現在設 $f(\lambda)$ 是复函数 $f(\lambda)=\varphi(\lambda)+\psi(\lambda)i$。那末 $f(A)=\varphi(A)+$ $+i\psi(A)$，其中 $\varphi(A)$ 及 $\psi(A)$ 都是自共軛运算子。作出运算子 $F(A)=\varphi(A)-i\psi(A)$ 来，并应用 $\varphi(A)$ 及 $\psi(A)$ 两运算子的自共軛性，可以写成：

$$(f(A)x,\ y)=(x,\ F(A)y),$$

就是說运算子 $F(A)$ 是与 $f(A)$ 共軛的。

还要注意某些交换性質。由公式 (132) 可知对于任意值 λ 运算子 $\mathscr{E}_\lambda$ 与 A 交换。因此对于任意值 α 及 β，运算子 $\Delta\mathscr{E}_\lambda=\mathscr{E}_\beta-\mathscr{E}_\alpha$ 也与 A 交换。于是和 σ_δ 也与 A 交换，而取極限，可知运算子 $f(A)$

与 A 交换。現在証明下面定理：

定理 30. 运算子 $f(A)$ 与一切与 A 交换的运算子 B 交换。

設 ε_n 是趋向于零的正数序列。依外尔史特拉斯定理[II; 154]可知有一序列多项式 $P_n(\lambda)$ 存在，满足

$$|f(\lambda)-P_n(\lambda)|\leqslant\varepsilon_n\quad(m\leqslant\lambda\leqslant M)。\tag{138}$$

作差

$$f(A)-P_n(A)=\int_m^M[f(\lambda)-P_n(\lambda)]d\mathscr{E}_\lambda。$$

留意公式(126)及(138)可以写成：

$$\|[f(A)-P_n(A)]x\|\leqslant\varepsilon_n\|x\|。\tag{139}$$

由不等式(138)可知 $|P_n(\lambda)|\leqslant p$，其中 p 是与 n 无关的正数。如此，运算子 $P_n(A)$ 的范数依 (126) 不超过 p，而依 (139) $P_n(A)\to\to f(A)$。与 A 交换的运算子B与任意多项式 $P_n(A)$ 也交换，就是說 $BP_n(A)=P_n(A)B$。取極限可得 $Bf(A)=f(A)B$，于是定理証明了。在下面，証明定理 29 时，将証明对于任意 λ，譜函数 $\mathscr{E}_\lambda$ 与任意与 A 交换的运算子 B 交换。反之，如果 B 与 $\mathscr{E}_\lambda$ 交换，那末 B 与任意运算子 $A\mathscr{E}_\lambda$ 交换，因而与和(131)交换，而取極限可知它与运算子 A 交换。如此可得下面定理：

定理 31. 为了运算子 B 与 A 交换，必須而且只須对于任意数 λ，它与 $\mathscr{E}_\lambda$ 都交换。

111. 豫解运算子　使用譜函数，可以写出豫解运算子的公式来，并可以对定理 15 作重要的补充。

定理 32. 如果 l 是非实数或是在区間 $[m, M]$ 之外的实数，那末运算子 A 的豫解运算子 R_l（它依定理 15 存在）可以由公式

$$R_l=\int_m^M\frac{1}{\lambda-l}d\mathscr{E}_\lambda\tag{140}$$

决定。

依定理的条件，对于足够小的 ε_0，函数 $\dfrac{1}{\lambda-l}$ 在区間 $[m-\varepsilon_0, M]$ 中是連續的。应用公式(134_1)可得

$$\int_m^M \frac{1}{\lambda-l}d\mathscr{E}_\lambda\cdot\int_m^M(\lambda-l)d\mathscr{E}_\lambda=$$

$$=\int_m^M(\lambda-l)d\mathscr{E}_\lambda\cdot\int_m^M\frac{1}{\lambda-l}\,d\mathscr{E}_\lambda=\int_m^M d\mathscr{E}_\lambda=E。\qquad(141)$$

但

$$\int_m^M(\lambda-l)d\mathscr{E}_\lambda=A-lE,$$

而(141)直接可以导引出(140)来。

定理 33. 如果 l 屬于区間 $[m, M]$，但在某区間 $[\alpha, \beta]$ 之內，并且 $\mathscr{E}_\lambda$ 在 $[\alpha, \beta]$ 之中是不变的，即 $\mathscr{E}_\beta=\mathscr{E}_\alpha$，那末豫解运算子 R_l 存在，并由公式(140)表现出来。

分解 $[m-\varepsilon_0, M]$ 成三部分：$[m-\varepsilon_0, \alpha]$，$[\alpha, \beta]$ 及 $[\beta, M]$。在区間 $[m-\varepsilon_0, \alpha]$ 及 $[\beta, M]$ 上函数 $1:(\lambda-l)$ 是連續的，而在区間 $[\alpha, \beta]$ 中 $\mathscr{E}_\lambda$ 是不变的，而对于这区間凡运算子 $\Delta_k\mathscr{E}_\lambda$ 都是零运算子。把函数 $1:(\lambda-l)$ 由两端的区間延續到中間的区間 $[\alpha, \beta]$ 中去，使它在整个区間 $[m-\varepsilon_0, M]$ 中都是連續的。用 $\varphi(\lambda)$ 表示如此作成的函数。积分值

$$R_l=\int_m^M\varphi(\lambda)d\mathscr{E}_\lambda\qquad(140_1)$$

显然与 $\varphi(\lambda)$ 在区間 $[\alpha, \beta]$ 上的值无关。应用公式(134)可以写成：

$$\int_m^M\varphi(\lambda)d\mathscr{E}_\lambda\cdot\int_m^M(\lambda-l)d\mathscr{E}_\lambda=$$

$$=\int_m^M(\lambda-l)d\mathscr{E}_\lambda\cdot\int_m^M\varphi(\lambda)d\mathscr{E}_\lambda=\int_m^M(\lambda-l)\varphi(\lambda)d\mathscr{E}_\lambda,$$

留意当 $\lambda\leqslant\alpha$ 及 $\lambda\geqslant\beta$ 时 $\varphi(\lambda)=1:(\lambda-l)$，而 $\mathscr{E}_\lambda$ 在区間 $[\alpha, \beta]$ 上是不变的，可得

$$\int_m^M\varphi(\lambda)(\lambda-l)d\mathscr{E}_\lambda=\int_m^\alpha d\mathscr{E}_\lambda+\int_\beta^M d\mathscr{E}_\lambda=\mathscr{E}_\alpha+(E-\mathscr{E}_\beta)=E,$$

由此可知(140_1)是豫解运算子。显然可以取积分(140)代替积分(140_1)，但須在前者中积分取做从 $m-\varepsilon_0$ 到 α 及由 β 到 M 的。由証明了的定理可知如果 $\lambda=l$ 屬于 $[m, M]$，而它可以用一区間复盖，并且在这区間中 $\mathscr{E}_\lambda$ 不変，那末 $\lambda=l$ 是正則的。在下面定理中將証明，这条件对于正則点不但是充分的，而且是必要的。

定理 34. 如果对于实数值 $\lambda=l$ 豫解运算子 R_l 存在，那末 l 必然位于一个使 $\mathscr{E}_\lambda$ 不变的区間$[\alpha, \beta]$之内。

設$[\alpha, \beta]$是任意一个包含 l 在内的区間，而 $\Delta\mathscr{E}_\mu=\mathscr{E}_\beta-\mathscr{E}_\alpha$。依豫解运算子的定义，$\Delta\mathscr{E}_\mu x=R_l(A-lE)\Delta\mathscr{E}_\mu x$。但依($132_2$)，我們可以写成：

$$(A-lE)\Delta\mathscr{E}_\mu x=\int_\alpha^\beta(\lambda-l)d\mathscr{E}_\lambda x,$$

如此

$$\Delta\mathscr{E}_\mu x=R_l\left[\int_\alpha^\beta(\lambda-l)d\mathscr{E}_\lambda x\right]\quad(\alpha<l<\beta)。$$

用 N 表示运算子 R_l 的范数：

$$\|\Delta\mathscr{E}_\mu x\|\leqslant N\left\|\int_\alpha^\beta(\lambda-l)d\mathscr{E}_\lambda x\right\|。\tag{142}$$

在区間$[\alpha, \beta]$上，$|\lambda-l|<\beta-\alpha$，依(126)不等式(142)变成不等式

$$\|\Delta\mathscr{E}_\mu x\|\leqslant N(\beta-\alpha)\|\Delta\mathscr{E}_\mu x\|。\tag{143}$$

取包含 l 在内的区間$[\alpha, \beta]$足够小，使不等式 $N\cdot(\beta-\alpha)<1$ 成立。于是由不等式(143)直接可得 $\|\Delta\mathscr{E}_\mu x\|=0$，就是說，$\mathscr{E}_\beta=\mathscr{E}_\alpha$，于是区間$[\alpha, \beta]$就是使 $\mathscr{E}_\lambda$ 不变的区間。

总結定理 33 及 34，可得下面的系：

系 1. 实数值 λ 是正則点的必要且充分的条件乃是 λ 位于一个使 $\mathscr{E}_\lambda$ 不变的区間之内。

由这系直接可知，如果某一实数 λ 是正則点，那末凡与这值 λ 足够邻近的实数也必是正則点，就是說，諸正則点 λ 組成实数軸上的一个开集合，所以可得：

系 2. 自共軛运算子的譜中諸点組成实数軸上的一个閉集合。

112. 豫解运算子的性質及反演公式 現在叙述豫解运算子的几个簡單性質，这些性質可以直接由豫解运算子的定义及公式(140)得出来。

定理 35. 对于任意两个非实数值 l 及 l_1，豫解运算子满足下列方程：

$$R_l - R_{l_1} = (l - l_1) R_{l_1} R_l, \tag{144}$$

$$R_l^* = R_{\bar{l}}, \tag{145}$$

而如果 $R_l x = 0$ 对于某一 l 成立，那末 $x = 0$。

公式(144)直接可以由等式

$$\int_m^M \frac{1}{\lambda - l} d\mathscr{E}_\lambda x - \int_m^M \frac{1}{\lambda - l_1} d\mathscr{E}_\lambda x = (l - l_1) \int_m^M \frac{1}{(\lambda - l)(\lambda - l_1)} d\mathscr{E}_\lambda x$$

得出，因为右边的积分乃是积

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda - l} \Delta_k \mathscr{E}_\lambda \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda - l_1} \Delta_k \mathscr{E}_\lambda x$$

的極限。为了証明(145)，先写出 R_l 的双綫性泛函表示式：

$$(R_l x, y) = \int_m^M \frac{1}{\lambda - l} d(\mathscr{E}_\lambda x, y), \tag{146}$$

及一系列显明的等式：

$$(R_l x, y) = \int_m^M \frac{1}{\lambda - l} d\overline{(\mathscr{E}_\lambda y, x)} = \overline{\int_m^M \frac{1}{\lambda - \bar{l}} d(\mathscr{E}_\lambda y, x)} =$$

$$= \overline{(R_{\bar{l}} y, x)} = (x, R_{\bar{l}} y),$$

由此可得 (145)。最后，如果 $R_l x = 0$，那末依豫解运算子的定义，$x = (A - lE) R_l x = 0$。上面的証明将在下面引用[157]*。在积分(146)中，如在[108]中所指出，可以把积分区間取成$(-\infty, +\infty)$，而在微分号下的函数是 λ 的囿变函数。令 $l = \sigma + i\tau$，而引用柯西-斯提勒杰斯反演公式[30]，可得用豫解运算子表現譜函数的公式：

$$\frac{1}{2}[(\mathscr{E}_{\lambda-0}x,\ y)+(\mathscr{E}_{\lambda+0}x,\ y)]=$$

$$=\lim_{\tau\to+0}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\lambda}((R_{\sigma+\tau i}-R_{\sigma-\tau i})x,\ y)d\sigma。\qquad(147)$$

如果 λ 是 $\mathscr{E}_{\lambda}$ 的連續点，那末上面公式的左边等于$(\mathscr{E}_{\lambda}x,\ y)$。在間断点处的$(\mathscr{E}_{\lambda}x,\ y)$值由右連續性决定。注意，豫解运算子 R_l 由公式(127)中的运算子 A 决定，而由公式(147)可知如果已知一个預定的自共軛运算子 A，則只有一个譜函数，使 A 由公式(127)表現出来。再注意，依定理 30，对于不同的 l，諸 R_l 是相交換的。

113．固有值与固有元　应用譜函数可以很簡單地决定出自共軛运算子的固有值及固有元来。

定理 36． 設 A 是自共軛运算子，其譜函数是 $\mathscr{E}_{\lambda}$，那末 $\lambda=\lambda_0$ 是 A 的固有值的必要且充分的条件乃是点 λ_0 是函数 $\mathscr{E}_{\lambda}$ 的一个間断点，即 $\mathscr{E}_{\lambda_0}-\mathscr{E}_{\lambda_0-0}>0$。这时如果 M_0 是与固有值 λ_0 相应的固有元所組成的子空間，那末 $\mathscr{E}_{\lambda_0}-\mathscr{E}_{\lambda_0-0}$ 就是在子空間 M_0 中的投影运算子。

設 M_0 是与投影运算子 $\mathscr{E}_{\lambda_0}-\mathscr{E}_{\lambda_0-0}$ 相应的子空間。如果 λ_0 是 $\mathscr{E}_{\lambda}$ 的連續点，那末 M_0 乃是由零元独自組成的。本定理的証明于是归結成下面两个命題：如果 $x_0\in M_0$，那末$(A-\lambda_0E)x_0=0$，而反之，如果$(A-\lambda_0E)x_0=0$，那末 $x_0\in M_0$。如此，首先設 $x_0\in M_0$，就是說$(\mathscr{E}_{\lambda_0}-\mathscr{E}_{\lambda_0-0})x_0=x_0$。这时 $\mathscr{E}_{\lambda_0}x_0=x_0$ 更要成立，所以 $\mathscr{E}_{\lambda_0-0}x_0=$ $=0$。留意 $\mathscr{E}_{\lambda}$ 在 λ 增加时并不减，可知当 $\lambda\geqslant\lambda_0$ 时 $\mathscr{E}_{\lambda}x_0=x_0$，而当 $\lambda<\lambda_0$ 时 $\mathscr{E}_{\lambda}x_0=0$。把公式(128)应用到元 x_0 上去：

$$Ax_0=\int_m^M\lambda d\mathscr{E}_{\lambda}x_0,$$

而在作和 σ_δ 时可設 λ_0 是分点。依上面所說，除却一个之外，一切差 $\Delta_k\mathscr{E}_{\lambda}x_0$ 都是零，而这例外的一項乃是与右端为 λ_0 的那区間相应者，就是

$$Ax_0=\lim_{\varepsilon\to 0}\nu_0(\mathscr{E}_{\lambda_0}-\mathscr{E}_{\lambda_0-\varepsilon})x_0,$$

其中 $\lambda_0-\varepsilon\leqslant\nu_0\leqslant\lambda_0$。取極限，可得

$$Ax_0=\lambda_0(\mathscr{E}_{\lambda_0}-\mathscr{E}_{\lambda_0-0})x_0,$$

但依条件 $x_0\in M_0$，所以上面公式的右边等于 λ_0x_0，就是說 x_0 滿足方程 $(A-\lambda_0E)x_0=0$。現在反之令 x_0 滿足这方程，并进而証明 $x_0\in M_0$。由 $(A-\lambda_0E)x_0=0$ 可知

$$((A-\lambda_0E)^2x_0,\ x_0)=0,$$

而如用斯提勒杰斯积分表示双綫性泛函，可得

$$\int_m^M(\lambda-\lambda_0)^2d\|\mathscr{E}_\lambda x_0\|^2=0。\qquad(148)$$

积分号下的函数 $(\lambda-\lambda_0)^2$ 是非負的，而在微分号下的函数乃是 λ 的不减函数。由此可知积分(148)的一切元都是非負的，而这积分在积分区間的任意部分上的积分值必都等于零。取某正数 ε，可以写成

$$\int_{\lambda_0+\varepsilon}^M(\lambda-\lambda_0)^2d\|\mathscr{E}_\lambda x_0\|^2=0。\qquad(149)$$

被积分函数 $(\lambda-\lambda_0)^2$ 在积分区間上 $\geqslant\varepsilon^2$，而由公式(149)更可以知道

$$\varepsilon^2\int_{\lambda_0+\varepsilon}^M d\|\mathscr{E}_\lambda x_0\|^2=0,$$

就是說

$$\varepsilon^2[\|x_0\|^2-\|\mathscr{E}_{\lambda_0+\varepsilon}x_0\|^2]=0。$$

旣然 ε 是任意的，可知当 $\lambda>\lambda_0$ 时 $\mathscr{E}_\lambda x_0=x_0$。完全同样也可以証明当 $\lambda<\lambda_0$ 时 $\mathscr{E}_\lambda x_0=0$。由此直接可知 $x_0=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\mathscr{E}_{\lambda_0+\varepsilon}-\mathscr{E}_{\lambda_0-\varepsilon})x_0=(\mathscr{E}_{\lambda_0}-\mathscr{E}_{\lambda_0-0})x_0$，而定理完全証明了。

設空間 H 是可分的。这时在与某一固有值相应的固有元所組成的每一子空間中，可以取这子空間的閉規格化正交組。这組可能由有穷多或由可数多元組成的。这数目决定了相应固有值的秩

數。我們知道,与不同固有値相应的固有元是互相正交的。如此,在每一固有元的子空間中作閉的規格化正交組,可得 H 中一組規格化正交元。依 H 的可分性这組由有穷多或可数无穷多元組成:

$$x_1, x_2, x_3, \cdots。\qquad (150)$$

由此直接可知,如存在有固有值,那末其数是有穷或可数无穷的。組(150)中的每个元与某一固有値相应,而如此我們可得一序列固有値:

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots, \qquad (151)$$

而固有元 x_k 与固有值 μ_k 相应。如果某一固有値的秩是 r,那末这固有値在序列(151)中出现 r 次。如果 $r=\infty$,那末这固有值在那序列中出现无穷次。用 λ_k $(k=1, 2, \cdots)$ 表示 $\mathscr{E}_\lambda$ 的間断点,而用 L_k 表示相应的固有元子空間,我們可以写成:

$$P_{L_k}=\mathscr{E}_{\lambda_k}-\mathscr{E}_{\lambda_k-0}。\qquad (152)$$

作子空間 L_k 的正交和:

$$H'=L_1\dotplus L_2\dotplus L_3\dotplus\cdots。\qquad (153)$$

我們知道,在子空間 H' 中的投影运算子由下面公式表出:

$$P_{H'}=P_{L_1}+P_{L_2}+P_{L_3}+\cdots。\qquad (154)$$

子空間 H' 乃是由凡可以借規格化正交組(150)中的元由收斂級数

$$x=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots \qquad (155)$$

表示出来的元 x 所組成的子空間。

114. 純点譜　我們說自共軛运算子 A 有純点譜,是指規格化正交組(150)在空間 H(可分的)中是閉的。这与下面条件同效,即公式(153)定义的子空間 H' 与 H 重合,这也等于說,公式(154)定义的投影运算子 $P_{H'}$ 是不变映像,就是說:

$$E=\sum_k P_{L_k}。\qquad (156)$$

把这公式两边乘以 $\mathscr{E}_\lambda$,并注意当 $\lambda<\lambda_k$ 时 $(\mathscr{E}_{\lambda_k}-\mathscr{E}_{\lambda_k-0})\mathscr{E}_\lambda=0$,而

当 $\lambda \geqslant \lambda_k$ 时 $(\mathscr{E}_{\lambda_k}-\mathscr{E}_{\lambda_k-0})\mathscr{E}_\lambda=\mathscr{E}_{\lambda_k}-\mathscr{E}_{\lambda_k-0}$，可以用这投影运算子的跃度表示 $\mathscr{E}_\lambda$：

$$\mathscr{E}_\lambda=\sum_{\lambda_k \leqslant \lambda} P_{L_k}=\sum_{\lambda_k \leqslant \lambda}(\mathscr{E}_{\lambda_k}-\mathscr{E}_{\lambda_k-0})。\tag{157}$$

在所考察的情形中任意元 x 由級数 (155) 表示，其中 a_k 是 x 相关于組(150)的傅立叶系数。在公式 (155) 两边使用运算子 A，并留意 $Ax_k=\mu_k x_k$，可得

$$Ax=\sum_s a_s \mu_s x_s。\tag{158}$$

取其与 y 的数积，并用 b_s 表 y 元的傅立叶系数，就是說：

$$b_s=(y,\ x_s);\quad \bar{b}_s=(x_s,\ y),$$

可得双綫性泛函的表示式：

$$(Ax,\ y)=\sum_s \mu_s a_s \bar{b}_s。\tag{159}$$

令 $y=x$，可得二次泛函的公式：

$$(Ax,\ x)=\sum_s \mu_s |a_s|^2,\tag{160}$$

这与表二次型(埃尔密特式)为平方和形式的公式完全相类似。如此，在純点譜的情形中运算子 A 及其相应的双綫性泛函及二次泛函都可以很簡單的借規格化正交組 (150) 表示出来。現在来考察所謂純連續的譜。

115. 連續的簡單譜 我們說自共軛运算子 A 有純連續譜，是指譜函数 $\mathscr{E}_\lambda$ 对于一切 λ 值都是連續的。我們的任务是对于純連續譜的情形作出与上节中公式相类的公式来。首先必須介紹一个新概念。

設 e 是 H 中的某一集合，而 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是屬于 e 的几个 H 元。用任意的系数 c_k 作它們的一次組合式 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$。$H$ 中凡可以如此表成屬于 e 的有穷个元的一次組合式的元显然組成一綫性簇 L。再介紹一新概念。

定义 所謂 H 中一部分集合 e 的閉綫性鞘，是指上面所說的那个綫性簇 L 的閉包。

閉綫性鞘是子空間，而属于它的元 x 的特征乃是下面的性質：对于任意預定的正数 ε，必存在屬于 e 的有穷多元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，及数 c_k，滿足

$$\|x-(c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n)\|\leqslant\varepsilon。$$

显然，凡 e 中元的有穷一次組合式都是上述子空間中的元。

設 $\mathscr{E}_\lambda$ 是具有純連續譜的运算子的譜函数。注意，在这情形下 $\mathscr{E}_m=0$。取一个不等于零元的元 x，并作元

$$\mathscr{E}_\lambda x \tag{161}$$

的集合，其中 λ 遍表从 m 到 M 的一切值。用 C_x 表諸元(161)的閉綫性鞘。对于 H 中的任意元 y，可以作与它相应的 λ 的連續函数

$$\varphi_y(\lambda)=(y,\ \mathscr{E}_\lambda x), \tag{162}$$

这函数显然对于 y 是分配的，就是說：

$$\varphi_{ay+bz}(\lambda)=a\varphi_y(\lambda)+b\varphi_z(\lambda)。$$

此外，作下面两个 λ 的連續函数：

$$\rho(\lambda)=(\mathscr{E}_\lambda x,\ x)=\|\mathscr{E}_\lambda x\|^2;\quad h_y(\lambda)=(\mathscr{E}_\lambda y,\ y)=\|\mathscr{E}_\lambda y\|^2。 \tag{163}$$

我們知道，当 λ 增加时，这两函数都不減。如果 Δ 是任意区間 $[\alpha,\ \beta]$，那末对于任意函数 $f(\lambda)$ 引用平常的記号

$$\Delta f(\lambda)=f(\beta)-f(\alpha)。 \tag{163_1}$$

例如：
$$\Delta\rho(\lambda)=(\Delta\mathscr{E}_\lambda x,\ x)=((\mathscr{E}_\beta-\mathscr{E}_\alpha)x,\ x),$$

就是說

$$\Delta\rho(\lambda)=\|\Delta\mathscr{E}_\lambda x\|^2, \tag{164}$$

同样，

$$\Delta h_y(\lambda)=\|\Delta\mathscr{E}_\lambda y\|^2。 \tag{165}$$

对于函数 $\varphi_y(\lambda)$，則

$$\Delta\varphi_y(\lambda)=(y,\ \Delta\mathscr{E}_\lambda x)=(y,\ (\Delta\mathscr{E}_\lambda)^2x)=(\Delta\mathscr{E}_\lambda y,\ \Delta\mathscr{E}_\lambda x),$$

所以，依不等式(6)：

$$|\Delta\varphi_y(\lambda)|^2\leqslant\|\Delta\mathscr{E}_\lambda x\|^2\cdot\|\Delta\mathscr{E}_\lambda y\|^2,$$

就是說 $$|\Delta\varphi_y(\lambda)|^2\leqslant\Delta\rho(\lambda)\cdot\Delta h_y(\lambda)。$$

由此可以看出,下面的积分存在:

$$\int_m^M \frac{d\varphi_y(\lambda)\overline{d\varphi_y(\lambda)}}{d\rho(\lambda)}=\int_m^M \frac{|d\varphi_y(\lambda)|^2}{d\rho(\lambda)}。\tag{166}$$

我們在下面將証明,如果 $y\in C_x$, 那末这积分等于$\|y\|^2$。分解区間 $[m, M]$成部分区間 $\Delta_k(k=1, 2, \cdots, n)$,并作空間$H$中的元如下:

$$\frac{\Delta_k\mathscr{E}_\lambda x}{\sqrt{\Delta_k\rho(\lambda)}}。\tag{167}$$

如果在区面 Δ_k 上函数 $\rho(\lambda)$是常数, 那末 $\Delta_k\mathscr{E}_\lambda x=0$, 而相应的式(167)沒有意义。我們規定在下面諸公式中抛弃这种沒有意义的項。依(107)及(164),(167)中其余諸元是互相正交并且規格化的。元 y 依組(167)取的傅立叶系数乃是

$$\frac{(y, \Delta_k\mathscr{E}_\lambda x)}{\sqrt{\Delta_k\rho(\lambda)}}=\frac{\Delta_k\varphi_y(\lambda)}{\sqrt{\Delta_k\rho(\lambda)}}。$$

元 y 与其傅立叶級数之差的范数平方可以表成[95]公式

$$\left\|y-\sum_{k=1}^n \frac{\Delta_k\varphi_y(\lambda)}{\Delta_k\rho(\lambda)}\Delta_k\mathscr{E}_\lambda x\right\|^2=\|y\|^2-\sum_{k=1}^n \frac{|\Delta_k\varphi_y(\lambda)|^2}{\Delta_k\rho(\lambda)},\tag{168}$$

由此得貝色勒不等式

$$\sum_{k=1}^n \frac{|\Delta_k\varphi_y(\lambda)|^2}{\Delta_k\rho(\lambda)}\leqslant\|y\|^2,\tag{169}$$

而当諸部分区間縮小时取極限,可得

$$\int_m^M \frac{|d\varphi_y(\lambda)|^2}{d\rho(\lambda)}\leqslant\|y\|^2。\tag{170}$$

定理 37. 如果 $y\in C_x$, 那末下面公式成立:

$$\|y\|^2=\int_m^M \frac{|d\varphi_y(\lambda)|^2}{d\rho(\lambda)}。\tag{171}$$

如果 $y\in C_x$, 那末既然 C_x 是諸 $\mathscr{E}_\lambda x$ 的閉綫性轄, 对于任意預定的正数 ε, 必存在 $\mathscr{E}_\lambda x$ 中的有穷多个元 $\mathscr{E}_{\lambda_s}x(s=1, 2, \cdots, p)$,及

几个数 c_s，使

$$y=\sum_{s=1}^{p} c_s \mathscr{E}_{\lambda_s} x + z, \quad \|z\| \leqslant \varepsilon。 \tag{172}$$

取諸点 $\lambda_s (s=1, 2, \cdots, p)$ 做区間 $[m, M]$ 的分点，并补充上 $\lambda_0 = m$，$\lambda_{p+1}=M$，如果它們不在諸λ_s之內。用 $\Delta'_s (s=1, 2, \cdots, p+1)$ 表示如此得出的諸部分区間$[\lambda_{s-1}, \lambda_s]$。于是 $\mathscr{E}_{\lambda_0}=0$，$\mathscr{E}_{\lambda_{p+1}}=E$，并可引用平常的記号 $\Delta'_s \mathscr{E}_\lambda = \mathscr{E}_{\lambda_s} - \mathscr{E}_{\lambda_{s-1}}$ 而写成

$$\mathscr{E}_{\lambda_1}=\Delta'_1 \mathscr{E}_\lambda; \quad \mathscr{E}_{\lambda_2}=\Delta'_1 \mathscr{E}_\lambda + \Delta'_2 \mathscr{E}_\lambda;$$

$$\mathscr{E}_{\lambda_3}=\Delta'_1 \mathscr{E}_\lambda + \Delta'_2 \mathscr{E}_\lambda + \Delta'_3 \mathscr{E}_\lambda; \quad \cdots。$$

由此出現于(172)中的諸 $\mathscr{E}_{\lambda_s} x$ 的一次組合式可以表成諸 $\Delta'_s \mathscr{E}_\lambda x$ 的一次組合式，而公式(172)可以表示成下面形式：

$$y=\sum_{s=1}^{p+1} b_s \Delta'_s \mathscr{E}_\lambda x + z, \quad \|z\| \leqslant \varepsilon,$$

其中諸 b_s 是新系数。換句話說，

$$\left\| y - \sum_{s=1}^{p+1} b_s \Delta'_s \mathscr{E}_\lambda x \right\| \leqslant \varepsilon。$$

如果把这式中的和換成元 y 依規格化正交組[95]

$$\frac{\Delta'_s \mathscr{E}_\lambda x}{\sqrt{\Delta'_s \rho(\lambda)}} \quad (s=1, 2, \cdots, p+1)$$

所取的傅立叶級数，那末上面的不等式更必成立。如此，依(168)，不等式(172)可以写成下面形式：

$$\|y\|^2 - \sum_{s=1}^{p+1} \frac{|\Delta'_s \varphi_y(\lambda)|^2}{\Delta'_s \rho(\lambda)} \leqslant \varepsilon^2,$$

就是說

$$\sum_{s=1}^{p+1} \frac{|\Delta'_s \varphi_y(\lambda)|^2}{\Delta'_s \rho(\lambda)} \geqslant \|y\|^2 - \varepsilon^2。$$

与(170)比較，并注意 ε 是任意的，可知不等式(169)中的和的上确界正是等于$\|y\|^2$，就是說公式(171)成立。应用这公式及公式

$$(y, z) = \frac{1}{2}\|y+z\|^2 + \frac{i}{2}\|y+iz\|^2 - \frac{1+i}{2}[\|y\|^2 + \|z\|^2],$$

可知对于屬于 C_x 的 y 及 z，更一般的公式

$$(y,z)=\int_m^M \frac{d\varphi_y(\lambda)\overline{d\varphi_z(\lambda)}}{d\rho(\lambda)} \tag{173}$$

成立，其中

$$\varphi_z(\lambda)=(z,\mathscr{E}_\lambda x)。 \tag{162$_1$}$$

为了推出关于双綫性泛函的相类公式，我們証明一个定理。

定理 38. 如果 $y\in C_x$，那末 $\mathscr{E}_\lambda y$ 及 Ay 也屬于 C_x。

既然 $y\in C_x$，那末或者 y 是元 $\mathscr{E}_{\lambda_s}x$ 的一个有穷一次組合式

$$y=\sum_{s=1}^{p} c_s\mathscr{E}_{\lambda_s}x, \tag{174}$$

或者 y 是如此一次組合式的極限。在第一情形中

$$\mathscr{E}_\lambda y=\sum_{s=1}^{p} c_s\mathscr{E}_\lambda\mathscr{E}_{\lambda_s}x。$$

但依(104)，当 $\lambda\leqslant\lambda_s$ 时 $\mathscr{E}_\lambda\mathscr{E}_{\lambda_s}=\mathscr{E}_\lambda$，而当 $\lambda\geqslant\lambda_s$ 时，$\mathscr{E}_\lambda\mathscr{E}_{\lambda_s}=\mathscr{E}_{\lambda_s}$，就是說 $\mathscr{E}_\lambda y$ 是 C_x 中元的有穷一次組合式，于是 $\mathscr{E}_\lambda y\in C_x$。如果 y 是 C_x中有穷一次組合式的極限：

$$y=\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{p_n} c_s^{(n)}\mathscr{E}_{\lambda_s^{(n)}}x,$$

那末

$$\mathscr{E}_\lambda y=\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{p_n} c_s^{(n)}\mathscr{E}_\lambda\mathscr{E}_{\lambda_s^{(n)}}x,$$

就是說，$\mathscr{E}_\lambda y$ 是 C_x 中有穷一次組合式的極限，因此在这情形中 $\mathscr{E}_\lambda y\in C_x$。依(128)元 Ay 是 $\mathscr{E}_\lambda y$ 的有穷一次組合式的極限。依上面証明过的，任意 $\mathscr{E}_\lambda y\in C_x$，因此凡 $\mathscr{E}_\lambda y$ 的有穷一次組合式屬于 C_x，所以这些有穷一次組合式的極限也屬于 C_x，因为 C_x 是子空間；就是說 $Ay\in C_x$，于是定理証明了。

如此可以在公式(173)中把 y 换成 Ay。

如此 $\varphi_y(\lambda)$ 换成函数[参閱(129)]

$$\varphi_{Ay}(\lambda)=(Ay,\mathscr{E}_\lambda x)=\int_m^M \mu d_\mu(\mathscr{E}_\mu y,\mathscr{E}_\lambda x)=\int_m^M \mu d_\mu(y,\mathscr{E}_\mu\mathscr{E}_\lambda x),$$

而留意(104)及(162)，可得:

$$\varphi_{A_y}(\lambda)=\int_m^\lambda \mu d_\mu \varphi_y(\mu),$$

而由公式(173)得

$$(Ay,z)=\int_m^M \frac{d\left(\int_m^\lambda \mu d_\mu\varphi_y(\mu)\right)\cdot\overline{d\varphi_z(\lambda)}}{d\rho(\lambda)},$$

注意黑林格尔积分的性質[86]可得公式

$$(Ay,z)=\int_m^M \lambda\frac{d\varphi_y(\lambda)\overline{d\varphi_z(\lambda)}}{d\rho(\lambda)}。\tag{175}$$

此外，依(171)，当无限地細分諸部分区間 Δ_k 时，在公式(168)右边的式子趋向于零，所以

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta_k\varphi_y(\lambda)}{\Delta_k\rho(\lambda)}\Delta_k\mathscr{E}_\lambda x\Rightarrow y。$$

上面和的諸項都是H中的元，而这和的極限自然可以写成黑林格尔积分的形式，如处理平常和时一样:

$$y=\int_m^M \frac{d\varphi_y(\lambda)}{d\rho(\lambda)}d\mathscr{E}_\lambda x。\tag{176}$$

如果以 Ay 代替 y 而引用这公式，那末与推論公式(176)时一样，用相似的推理可以得出公式

$$Ay=\int_m^M \lambda\frac{d\varphi_y(\lambda)}{d\rho(\lambda)}d\mathscr{E}_\lambda x,\tag{177}$$

因而

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{\Delta_k\varphi_y(\lambda)}{\Delta_k\rho(\lambda)}\Delta_k\mathscr{E}_\lambda x\Rightarrow Ay。\tag{177$_1$}$$

注意使用相类的和及在H中取極限，可以一般地定义H中元的黑林格尔积分。現在不把公式(173)及(176)应用于元 Ay 上，而把它們应用于元 $\mathscr{E}_\mu y$ 上去，这 $\mathscr{E}_\mu y$ 也屬于 C_x，而 μ 是区間 $[m, M]$ 中的一个定数。那末

$$\varphi_{\mathscr{E}_\mu y}(\lambda)=(\mathscr{E}_\mu y,\ \mathscr{E}_\lambda x)=(y,\ \mathscr{E}_\mu\mathscr{E}_\lambda x)=\begin{cases}(y,\ \mathscr{E}_\lambda x)\text{ 如果 }\lambda\leqslant\mu;\\(y,\ \mathscr{E}_\mu x)\text{ 如果 }\lambda\geqslant\mu,\end{cases}$$

就是說

$$\varphi_{\mathscr{E}_\mu y}(\lambda)=\begin{cases}\varphi_y(\lambda) & \text{当 }\lambda\leqslant\mu\text{ 时},\\ \varphi_y(\mu) & \text{当 }\lambda\geqslant\mu\text{ 时},\end{cases}$$

而由上面的公式直接可得

$$(\mathscr{E}_\mu y,\ z)=\int_m^\mu \frac{d\varphi_y(\lambda)\overline{d\varphi_z(\lambda)}}{d\rho(\lambda)}, \tag{173_1}$$

$$\mathscr{E}_\mu y=\int_m^\mu \frac{d\varphi_y(\lambda)}{d\rho(\lambda)}d\mathscr{E}_\lambda x。 \tag{176_1}$$

留意公式(173)与推广的閉性方程同效，而公式(175)及(177)与上节的公式(159)及(158)同效。在本节中的諸公式里，曾假設 y 及 $z\in C_x$。我們說自共軛运算子 A 有簡單的連續譜，是指 H 中存在一元 x，使 C_x 与 H 重合。如果这条件成立，而取 x 做上面所論的元，那末上面的諸公式对于 H 中的任意元 y 及 z 都成立。

116. 不变子空間 为了研究非簡單的連續譜及混合譜(就是說固有元存在，但并不組成閉組的情形)，那末我們必須首先介紹一新概念，并証明一些事实。

定义 子空間 L 叫做运算子 A 的不变子空間，是指下面的条件成立：如果 $x\in L$，那末 $Ax\in L$。这时我們也說：L 簡約 A。

这定义的意义是如下的。如果 L 簡約 A，那末运算子 A 可以單独看做是定义于 L 中的运算子，而 L 或者是有穷維的，或者可以看做是希勒柏特空間。換句話說，定义于整个 H 上的运算子 A 誘导出一个定义于 L 中运算子，而这誘导出来的运算子对于 L 中的元与 A 的作用相同。在个別的不变子空間上考察 A 可以簡化对于 A 的研究。如果 A 是 H 中的自共軛运算子，那末它显然在 H 的任意不变子空間中也是自共軛运算子。在下面將只就自共軛运算子来考察不变子空間。

定理 39. 如果子空間 L 簡約自共軛运算子 A，那末其相补子空間 $H-L$ 也簡約 A。L 簡約自共軛运算子 A 的必要且充分的条件乃是：投影运算子 P_L 与 A 交換，就是說，

$$P_L A = A P_L。 \tag{178}$$

如果 L 簡約 A，那末当 $z \in L$ 时 $Az \in L$。必須証明当 $x \perp L$ 时，$Ax \perp L$。設 z 是 L 中的任意元。如此 $Az \in L$，所以

$$(Ax, z) = (x, Az) = 0,$$

于是定理的第一部分証明了。現在証明条件(178)。首先写出显然的等式

$$Ax = AP_L x + A(E-P_L)x。$$

如果 L 簡約 A，那末 $A(P_L x) \in L$，而依上面剛才証明过的，$A[(E-P_L)x] \in H-L$，所以右边的第一項是 Ax 在 L 中的投影，就是說 $P_L Ax = AP_L x$ 对于任意 x 成立，于是(178)的必要性証明了。反之設(178)滿足，而 $x \in L$，如此 $Ax = A(P_L x) = P_L(Ax)$，就是說 $Ax \in L$，于是定理完全証明了。应用定理 31，可以得出上面定理的一个直接推論来：

系 子空間 L 簡約 A 的必要且充分的条件乃是对于任意 λ，L 簡約 $\mathscr{E}_\lambda$。

定理 40. 如果互相正交的諸子空間 $L_k (k=1, 2, \cdots)$ 都簡約 A，那末它們的正交和

$$L = L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} L_3 \dot{+} \cdots$$

也簡約 A。

依定理的条件 A 与一切 P_{L_k} 交換，所以也与它們的和

$$P_L = P_{L_1} + P_{L_2} + P_{L_3} + \cdots$$

交換，于是定理証明了。如果 A 是非自共軛的运算子，定理 40 仍旧成立。

現在指出与自共軛运算子的不变子空間这个概念相联系着的

几个事实。如果投影运算子 P_M 与投影运算子 P_L 交换，那末 L 簡約 P_M，而运算子 P_M 在 L 中誘导出在子空間 LM 中的投影运算子 P_{LM}。再設 L 簡約 A，那末它也簡約 A 的譜函数 $\mathscr{E}_\lambda$。用 $A^{(1)}$ 及 $\mathscr{E}_\lambda^{(1)}$ 表示运算子 A 及 $\mathscr{E}_\lambda$ 在 L 中誘导出来的运算子。不难証明 $\mathscr{E}_\lambda^{(1)}$ 是对于 L 的主單位元分解。如果在公式(128)中，$x\in L$，那末可以把 A 換成 $A^{(1)}$、把 $\mathscr{E}_\lambda$ 換成 $\mathscr{E}_\lambda^{(1)}$，而 $\mathscr{E}_\lambda^{(1)}$ 是定义于 L 中的运算子 $A^{(1)}$ 的譜函数。依(140) L 也簡約运算子 A 的豫解运算子 R_l，而 R_l 在 L 中誘导出运算子 $A^{(1)}$ 的豫解运算子。設 $A^{(1)}$，$A^{(2)}$，$\mathscr{E}_\lambda^{(1)}$，$\mathscr{E}_\lambda^{(2)}$ 是自共軛运算子 A 及 $\mathscr{E}_\lambda$ 在不变子空間 L 及其相补子空間 $H-L$ 中誘导出来的运算子，而 $x=x_1+x_2$，$y=y_1+y_2$ 是 x 及 y 在 L 及 $H-L$ 中的分解。显然

$$\left.\begin{array}{c} Ax=A^{(1)}x_1+A^{(2)}x_2;\quad \mathscr{E}_\lambda x=\mathscr{E}_\lambda^{(1)}x_1+\mathscr{E}_\lambda^{(2)}x_2; \\ (Ax,y)=(A^{(1)}x_1,y)+(A^{(2)}x_2,y)。\end{array}\right\}\qquad(179)$$

当分解 H 为有穷多或可数无穷多相互正交的子空間时，若这些子空間又都簡約 A，那末有相类的公式成立。整个空間 H 及零空間(即是由零元一个元組成的子空間)是任意运算子的不变子空間。如果一运算子沒有此外的不变子空間，那末这运算子叫做既約运算子。凡与运算子 A 的某一固有值 λ_0 相应的固有元所組成的子空間是 A 的一个不变子空間，而在这子空間中运算子 A 的作用归結为对元乘以数 λ_0。如果 x_0 是与固有值 λ_0 相应的一个固有元，那末凡做 ax_0 形式(a 是任意复数)的元所組成的集合也是簡約 A 的一个子空間。如果 L_k ($k=1, 2, \cdots$) 是自共軛运算子 A 的諸固有元所成的一切子空間，那末其正交和 H' 也簡約 A。設 A' 及 $\mathscr{E}'_\lambda$ 各是运算子 A 及 $\mathscr{E}_\lambda$ 在 H' 中誘导出来的运算子。依(152)及(154)：

$$\left.\begin{array}{c} A'x=\sum\limits_k A(\mathscr{E}_{\lambda_k}-\mathscr{E}_{\lambda_k-0})x, \\ \mathscr{E}'_\lambda x=\sum\limits_k \mathscr{E}_\lambda(\mathscr{E}_{\lambda_k}-\mathscr{E}_{\lambda_k-0})x=\sum\limits_{\lambda_k\leqslant\lambda}(\mathscr{E}_{\lambda_k}-\mathscr{E}_{\lambda_k-0})x, \end{array}\right\}\qquad(180)$$

就是說，$\mathscr{E}'_\lambda$ 归結为函数 $\mathscr{E}_\lambda$ 在满足条件 $\lambda_k \leqslant \lambda$ 的諸点 λ_k 处的跃度和。在与 H' 相补的子空間 H'' 中，$\mathscr{E}_\lambda$ 在这子空間中誘导出来的运算子 $\mathscr{E}''_\lambda$ 是子空間 $H''M_\lambda$ 中的投影运算子，而 M_λ 是与投影运算子 $\mathscr{E}_\lambda$ 相应的子空間。H'' 中任意元与一切 L_k 相正交，就是說如果 $x\in H''$，$(\mathscr{E}_{\lambda_k}-\mathscr{E}_{\lambda_k-0})x=0$，我們可以对 H'' 中的任意 x 把 $\mathscr{E}''_\lambda$ 表示成差的形式：

$$\mathscr{E}''_\lambda=\mathscr{E}_\lambda-\sum_{\lambda_k\leqslant\lambda}(\mathscr{E}_{\lambda_k}-\mathscr{E}_{\lambda_k-0}),$$

所以 $\mathscr{E}''_\lambda$ 对于一切 λ 是連續的。如此，如果 A 的譜不是純点的，那末子空間 H'' 必包含不等于零的元，而譜函数在其中是連續的，并且运算子在 H'' 中完全沒有固有值。在 H' 中固有元組成閉組，而运算子 A 在 H' 中具有純点譜。

117. 連續譜的一般情形　我們曾看到，如果元 y 屬于在[115]中所作的子空間 C_y，那末 $Ay\in C_y$，就是說 C_y 簡約 A。如果运算子 A 沒有点譜，就是說它的譜函数 $\mathscr{E}_\lambda$ 对于一切值 λ 都是連續的，而其連續譜不是簡單的，那末，將証明空間 H 可以表示成 C_y 型的子空間的正交和。在每个这样的子空間中运算子 A 所誘导出来的运算子將具有簡單連續譜，而对于屬于这样子空間的元，[115]中介紹的諸公式將成立。对于 H 中的任意元，相应的公式可以借依上面諸子空間分解这元而得出，而依(179)，这些公式將借对于个別子空間的相应公式相加而得出。把 H 表成上面所說的 C_y 型諸子空間之正交和，并設空間 H 是可分的。取某一閉規格化正交組

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots。$$

設 $y_1=u_1$，作 C_{y_1}。元 u_2 可以表示成 $u_2=v_2+y_2$ 的形式，其中 $v_2\in C_{y_1}$，$y_2\perp C_{y_1}$。如果 $y_2\neq 0$，那末作 C_{y_2}。我們將証明 $C_{y_2}\perp C_{y_1}$。依条件，对于任意 λ，$(y_2,\mathscr{E}_\lambda y_1)=0$，因为 $\mathscr{E}_\lambda y_1\in C_{y_1}$。于是得 $(\mathscr{E}_\mu y_2,\mathscr{E}_\lambda y_1)=(y_2,\mathscr{E}_\mu\mathscr{E}_\lambda y_1)=0$。由此可知諸元 $\mathscr{E}_\mu y_2$ 的任意一

次組合式与諸元 $\mathscr{E}_\lambda y_1$ 的任意一次組合式正交，而取極限，可知 C_{y_2} 的任意元与 C_{y_1} 的任意元相正交。再取元 u_3，把它表示成 $u_3 = v_3 + y_3$ 的形式，而 $v_3 \in C_{y_1} \dot{+} C_{y_2}$，$y_3 \perp C_{y_1} \dot{+} C_{y_2}$，并作 C_{y_3}。与以前一样，可証 $C_{y_1} \perp C_{y_3}$，$C_{y_2} \perp C_{y_3}$，等等。如此可得有穷多或可数无穷多个两两正交的子空間 C_{y_k}，而既然 H 中每一元 x 可以依閉組中諸元 u_k 分解，那末諸子空間 C_{y_k} 的正交和就是整个 H：

$$H = C_{y_1} \dot{+} C_{y_2} \dot{+} C_{y_3} \dot{+} \cdots 。\qquad (181)$$

在每个子空間 C_{y_k} 中[115]中的公式都成立，如此对于 H 中的任意元 y 及 z，可以得

$$(y, z) = \sum_k \int_m^M \frac{d(y, \mathscr{E}_\lambda y_k) d(\mathscr{E}_\lambda y_k, z)}{d\rho_k(\lambda)}, \qquad (182_1)$$

$$(\mathscr{E}_\mu y, z) = \sum_k \int_m^\mu \frac{d(y, \mathscr{E}_\lambda y_k) d(\mathscr{E}_\lambda y_k, z)}{d\rho_k(\lambda)}, \qquad (182_2)$$

$$(Ay, z) = \sum_k \int_m^M \lambda \frac{d(y, \mathscr{E}_\lambda y_k) d(\mathscr{E}_\lambda y_k, z)}{d\rho_k(\lambda)}, \qquad (182_3)$$

$$y = \sum_k \int_m^M \frac{d(y, \mathscr{E}_\lambda y_k)}{d\rho_k(\lambda)} d\mathscr{E}_\lambda y_k ; \quad Ay = \sum_k \int_m^M \lambda \frac{d(y, \mathscr{E}_\lambda y_k)}{d\rho_k(\lambda)} d\mathscr{E}_\lambda y_k, \qquad (182_4)$$

$$\mathscr{E}_\mu y = \sum_k \int_m^\mu \frac{d(y, \mathscr{E}_\lambda y_k)}{d\rho_k(\lambda)} d\mathscr{E}_\lambda y_k, \qquad (182_5)$$

其中 $\rho_k(\lambda) = \|\mathscr{E}_\lambda y_k\|^2$；上面的和可能是有穷或无穷的。在无穷的情形中，对于包含 H 中元的公式 (182_4) 及 (182_5)，級数收斂是指 H 中的收斂[94]。

上面作子空間 C_y 的方法可以写成下面公式的形式。如果 v 是 H 中任意元，那末它在 C_{y_k} 中的投影由公式 (182_4) 的第一个中的相应項决定，就是說

$$v_k = \int_m^M \frac{d(v, \mathscr{E}_\lambda y_k)}{d\rho_k(\lambda)} d\mathscr{E}_\lambda y_k,$$

而对于 $\mathscr{E}_\lambda v_k$，留意(104)可以得

$$\mathscr{E}_\lambda v_k=\int_m^\lambda \frac{d(v,\mathscr{E}_\mu y_k)}{d\rho_k(\mu)}d\mathscr{E}_\mu y_k。\tag{183}$$

由此直接可得下面公式，与上面作子空間 C_{y_k} 的程序相应：

$$\mathscr{E}_\lambda y_1=\mathscr{E}_\lambda u_1;\quad \mathscr{E}_\lambda y_k=\mathscr{E}_\lambda u_k-\sum_{s=1}^{k-1}\int_m^\lambda \frac{d(u_k,\mathscr{E}_\mu y_s)}{d\rho_s(\mu)}d\mathscr{E}_\mu y_s。\tag{184}$$

当选擇不同的出發組 u_k 时，所得的子空間 C_{y_k} 一般說来也是不同的。可能这些子空間的数目也不同。

可以証明当满足下面条件时諸 C_{y_k} 的作法是可能的：凡依 $\rho_p(\lambda)$ 測度为零的集合依 $\rho_{p+1}(\lambda),\rho_{p+2}(\lambda),\cdots$ 測度也是零。依[74]的結果，这条件与下面的同效：凡 $\rho_p(\lambda)$ 可由前面的 $\rho_k(\lambda)$ 借下面公式表示出来：

$$\rho_p(\lambda)=\int_m^\lambda \varphi_p^{(k)}(\lambda)d\rho_k(\lambda)\quad (k=1,2,\cdots,p-1)$$

其中积分是勒貝格-斯提勒杰斯意义的，而 $\varphi_p^{(k)}(\lambda)$ 是一非負的依 $\rho_k(\lambda)$ 可測并可和的函数。当这条件满足时，我們說譜函数的分解是正常的。可以証明在不同的正常分解中子空間的数目永远是一样的。下面将再回到这問題上来。

118. 混合譜的情形 以前已會提到，所謂一自共軛运算子有混合譜，是指运算子有固有元，但这些固有元組成的規格化正交組

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\tag{185}$$

在 H 中并不是閉的。与前面一样，設 L_k 是与固有值 λ_k 相应的諸固有元組成的子空間。在[116]中已會看到，这运算子在不变子空間

$$H'=L_1\dot{+}L_2\dot{+}L_3\dot{+}\cdots$$

中有純点譜，其固有值是 λ_k，其相应固有元子空面是 L_k。(185)中的諸元这时組成 H' 中的閉組，是由 A 的固有元組成。在补子空間 H'' 中运算子祇有純連續譜。留意[117]中及[114]中的諸公式，可得下面的一般公式，其中和来自 H' 中的点譜，而积分来自

H'' 中的連續譜:

$$(y, z)=\sum_k a_k\bar{b}_k+\sum_k\int_m^M \frac{d(y, \mathscr{E}_\lambda y_k)d(\mathscr{E}_\lambda y_k, z)}{d\rho_k(\lambda)}, \quad (186_1)$$

$$(Ay, z)=\sum_k \mu_k a_k\bar{b}_k+\sum_k\int_m^M \lambda\frac{d(y, \mathscr{E}_\lambda y_k)d(\mathscr{E}_\lambda y_k, z)}{d\rho_k(\lambda)}, \quad (186_2)$$

$$y=\sum_k a_k x_k+\sum_k\int_m^M \frac{d(y, \mathscr{E}_\lambda y_k)}{d\rho_k(\lambda)}d\mathscr{E}_\lambda y_k, \quad (186_3)$$

$$Ay=\sum_k \mu_k a_k x_k+\sum_k\int_m^M \lambda\frac{d(y, \mathscr{E}_\lambda y_k)}{d\rho_k(\lambda)}d\mathscr{E}_\lambda y_k, \quad (186_4)$$

其中 a_k 及 b_k 各是元 y 及 z 依組 (185) 的傅立叶系数，而 μ_k 是与固有元 x_k 相应的 A 的固有值。

应用上面把运算子分解成一个在 H' 中具有純点譜的运算子及一个在 H'' 中具有連續譜的运算子的結果，可以把譜的点分类。

定义 所謂 λ_0 屬于点譜，是指 λ_0 是 A 的固有値。所謂点 λ_0 屬于極限譜，是指 λ_0 是点譜的極限点，就是說在其任意的 ε 邻域中有与 λ_0 不同的固有值。最后，所謂 λ_0 屬于連續譜，是指 λ_0 屬于由运算子 A 在 H'' 中誘导出来的运算子 A'' 的譜，就是說，是指在含 λ_0 于內部的任意区間中运算子 A'' 的譜函数 $\mathscr{E}''_\lambda$ 是非不变值的。

运算子 A 的每个譜点必至少屬于上列三种范疇之一，但可能同时一点 λ_0 屬于三种范疇。有时还引用譜的凝点的概念，就是說 λ_0 叫做譜的凝点，是指它或是无穷秩的固有值，或是極限譜的元，或是連續譜的元。

119. 微分解 考察一个具有純連續譜的运算子。对于任意 x，諸元 $\mathscr{E}_\lambda x$ 滿足某一与点譜情形中方程 $Ax=\lambda x$ 相似的方程。設 $\Delta[\lambda_1, \lambda_2]$ 是任意区間。应用性質(104)，可以写出与方程(134)相似的下面方程来:

$$\int_m^M \lambda d\mathscr{E}_\lambda\cdot\Delta\mathscr{E}_\lambda=\int_{\lambda_0}^{\lambda_2}\lambda d\mathscr{E}_{\lambda_0}$$

取元 $x(\lambda)=\mathscr{E}_\lambda x$，这元是在区間 $[m, M]$ 上連續地依从于参数 λ 的，这意思是說：当 λ_0 是 $[m, M]$ 中任意点，而 $\lambda\to\lambda_0$ 时，$\|x(\lambda_0)-x(\lambda)\|\to 0$。由上面的等式可以看出 $x(\lambda)$ 滿足方程

$$A[\Delta x(\lambda)]=\int_\Delta \lambda dx(\lambda)。\tag{187}$$

如此我們說 $x(\lambda)$ 是方程 $Ax=\lambda x$ 的微分解。在[117]中所作的諸矢量 $y_k(\lambda)=\mathscr{E}_\lambda y_k$ 就是微分解。对于不同的 k 值，它們位于相互正交的子空間 C_{y_k} 中，因此对于任意的区間 Δ_1 及 Δ_2，

$$(\Delta_1 y_p(\lambda),\ \Delta_2 y_q(\lambda))=0\quad(p\neq q)。\tag{188$_1$}$$

如果 Δ_1 及 Δ_2 沒有公共的內点，那末依(104)，

$$(\Delta_2 y_p(\lambda),\ \Delta_2 y_p(\lambda))=0。\tag{188$_2$}$$

如果 Δ_1 及 Δ_2 有公共部分 $\Delta_{1,2}$，那末依(104)，

$$(\Delta_1 y_p(\lambda),\ \Delta_2 y_p(\lambda))=\|\Delta_{1,2} y_p(\lambda)\|^2。\tag{189}$$

現在介紹微分解的完全組的概念。一組依(188$_1$)意义相互正交的微分解 $y_p(\lambda)$ 叫做完全的；是指与一切 $y_p(\lambda)$ 正交的元 x 必等于零元，就是說，如果对于任意 p 及任意 λ，

$$(y_p(\lambda),\ x)=0,\quad 那末\ x=0。\tag{188$_3$}$$

不难証明上面作的解 $y_p(\lambda)=\mathscr{E}_\lambda y_p$ 是完全組。事实上，由(188$_3$)可知 x 与諸元 $y_p(\lambda)=\mathscr{E}_\lambda y_p$ 的閉綫性精(子空間) C_{y_p} 正交，而且这是对于任意 p 都成立的。但諸 C_{y_p} 的正交和是整个 H，如此 x 与整个 H 正交，所以必是零元。

在作方程(187)的解时，曾从譜函数 $\mathscr{E}_\lambda$ 出發。現在將从方程本身出發。設以某种方式作成了方程(187)的解 $x(\lambda)$。在这方程中 $x(\lambda)$ 只是在差分号及微分号下出現，所以由 $x(\lambda)$ 減去某一与 λ 无关的元仍得方程的解。特別是差 $x(\lambda)-x(m)$ 也是解，因此可以設 $x(m)=0$ 也无損于普遍性。在下面將証明，方程 (187) 的任意一个在区間$[m, M]$中連續地依从于 λ 并滿足 $x(m)=0$ 的解一定

是做 $x(\lambda)=\mathscr{E}_\lambda x$ 的形式。設已經以某种方法作成了有穷多或可数无穷多个依(188)意义互相正交的方程(187)的解 $y_p(\lambda)$。依上面所說，它們之中的每个必是作 $y_p(\lambda)=\mathscr{E}_\lambda y_p$ 的形式，而 y_p 是 H 中的一元。每个 $y_p(\lambda)$ 的閉綫性鞘是一子空間 C_{y_p}，而依 (188_1)，这些子空間 C_{y_p} 是互相正交的。解 $y_p(\lambda)$ 的完全性就归結为下面的事实，即 C_{y_p} 的正交和是整个 H。如果这完全性成立，那末可以用 $y_k(\lambda)$ 代替 $\mathscr{E}_\lambda y_k$ 而把[117]中的一切公式(182)写出来。如此在作这些公式时可以从任意一个正交的連續微分解的完全組出發。如此作出来的相互正交解組的完全性可以由对于双綫性泛函的公式 (182_3) 証明，或当已知譜函数 $\mathscr{E}_\mu$ 时，由公式 (182_6) 証明。

还要注意，对于 $x(\lambda)=\mathscr{E}_\lambda x$ 可以作与(187)不同的方程。設区間 Δ 不包含 $\lambda=0$，依(104)，写出方程

$$\int_m^M \lambda d\mathscr{E}_\lambda \cdot \int_\Delta \frac{1}{\lambda} d\mathscr{E}_\lambda = \Delta\mathscr{E}_\lambda,$$

由此对于 $x(\lambda)$ 可得方程

$$A\left[\int_\Delta \frac{1}{\lambda} dx(\lambda)\right] = \Delta x(\lambda)。$$

如果移动因子，可得

$$\int_\Delta \frac{1}{\lambda} d[Ax(\lambda)] = \Delta x(\lambda)。$$

現在回来証明上面已陈述过的命題。

定理 41. 凡方程(187)在区間 $[m, M]$ 中連續并当 $\lambda=m$ 时等于零元的解必做 $x(\lambda)=\mathscr{E}_\lambda x(M)$ 的形式。

依条件 $x(m)=0$，由方程(187)可知

$$\int_m^\lambda \mu\, dx(\mu) = Ax(\lambda),$$

而在这里以及在下面 μ 都是表示积分变数。以某种方式固定两个数 $\mu_1<\mu_2$，可得

$$\int_m^\lambda \mu d(x(\mu), x(\mu_2)-x(\mu_1)) = (Ax(\lambda), x(\mu_2)-x(\mu_1))。$$

既然 A 是自共轭的，应用方程(187)可以写成

$$(Ax(\lambda),\ x(\mu_2)-x(\mu_1))=(x(\lambda),\ Ax(\mu_2)-Ax(\mu_1))=\int_{\mu_1}^{\mu_2}\mu d(x(\lambda),\ x(\mu)),$$

所以可得等式

$$\int_m^{\lambda}\mu d(x(\mu),\ x(\mu_2)-x(\mu_1))=\int_{\mu_1}^{\mu_2}\mu d(x(\lambda),\ x(\mu))。$$

把右边的积分分部积分，并应用中值定理于所得积分，

$$\int_m^{\lambda}\mu d(x(\mu),\ x(\mu_2)-x(\mu_1))=$$
$$=\mu_2(x(\lambda),\ x(\mu_2))-\mu_1(x(\lambda),\ x(\mu_1))-(\mu_2-\mu_1)(x(\lambda),\ x(\mu_3)),$$
$$\mu_3\in[\mu_1,\ \mu_2],$$

就是

$$\int_m^{\lambda}\mu d(x(\mu),\ x(\mu_2)-x(\mu_1))=$$
$$=(\mu_2-\mu_1)(x(\lambda),\ x(\mu_2))+\mu_1(x(\lambda),\ x(\mu_2)-x(\mu_1))-$$
$$-(\mu_2-\mu_1)(x(\lambda),\ x(\mu_3)),$$

而这公式可以改写成下面形式：

$$\int_m^{\lambda}(\mu-\mu_1)d\,\frac{(x(\mu),\ x(\mu_2)-x(\mu_1))}{\mu_2-\mu_1}=(x(\lambda),\ x(\mu_2)-x(\mu_3))。$$

作連續函数

$$\omega(\mu)=\frac{(x(\mu),\ x(\mu_2)-x(\mu_1))}{\mu_2-\mu_1},\quad f(\lambda)=(x(\lambda),\ x(\mu_2)-x(\mu_3)),\ (190)$$

可得

$$\int_m^{\lambda}(\mu-\mu_1)d\omega(\mu)=f(\lambda),$$

其中我們設 $\lambda<\mu_1<\mu_2$，而显然 $\omega(m)=0$。最后这方程很容易就 $\omega(\mu)$ 求解，只須在左边应用分部积分并設 $\omega(\lambda)=f(\lambda):(\lambda-\mu_1)+u(\lambda)$，其中 $u(\lambda)$ 是新的未知函数，它当 $\lambda=m$ 时等于零：

$$\omega(\lambda)=\frac{f(\lambda)}{\lambda-\mu_1}+\int_m^{\lambda}\frac{f(\mu)}{(\mu-\mu_1)^2}d\mu,$$

而用(190)两式代入，得

$$\frac{(x(\lambda),\ x(\mu_2)-x(\mu_1))}{\mu_2-\mu_1}=$$
$$=\frac{(x(\lambda),\ x(\mu_2)-x(\mu_3))}{\lambda-\mu_1}+\int_m^{\lambda}\frac{(x(\mu),\ x(\mu_2)-x(\mu_3))}{(\mu-\mu_1)^2}d\mu。$$

如果 $\mu_1 \to \mu_2$，那末 $\mu_3 \to \mu_2$，而右边第一项趋向于零。同样积分项也如此，因为 $|(x(u), x(\mu_2)-x(\mu_3))| \leqslant C\|x(\mu_2)-x(\mu_3)\|$；而 C 是 $\|x(u)\|$ 在区間 $[m, M]$ 中的最大値。我們所考察的是 μ_1 从較小値 $\to \mu_2$ 的情形。同样也可以考察 $\lambda<\mu_2<\mu_1$ 及 $\mu_1 \to \mu_2$ 的情形。由上面的公式可得：当 $\mu>\lambda$ 时，

$$\frac{d}{d\mu}(x(\lambda), x(\mu))=0。$$

所以当 $\mu>\lambda$ 时

$$(x(\lambda), x(\mu))=(x(\lambda), x(\lambda))=\|x(\lambda)\|^2。$$

当 $\mu=M$ 时应用这公式于方程(187)的解 $y(\lambda)=x(\lambda)-\mathscr{E}_\lambda x(M)$ 上去，則因这解当 $\lambda=m$ 及 $\lambda=M$ 时等于零，可得 $\|y(\lambda)\|^2=0$，就是說 $x(\lambda)=\mathscr{E}_\lambda x(M)$，于是定理証明了。

120. 乘自变数的运算 回到[115]的結果，并考察依函数 $\rho(\lambda)$ 平方可积的函数 $f(\lambda)$ 所成的函数空間 $L_2^{(\rho)}$，其中 $\rho(\lambda)$ 是由公式(163)定义的。类 $L_2^{(\rho)}$ 是凡定义于区間 $[m, M]$ 上依 $\rho(\lambda)$ 可測并且滿足

$$\int_m^M |f(\lambda)|^2 d\rho(\lambda)<+\infty \tag{191}$$

的函数 $f(\lambda)$ 所組成的类。空間 $L_2^{(\rho)}$ 是空間 H 的具体表现。在这空間中乘自变数的运算子

$$A_0[f(\lambda)]=\lambda f(\lambda) \tag{192}$$

显然是自共軛有界运算子，因为

$$\|\lambda f(\lambda)\| \leqslant n\|f(\lambda)\|,$$

其中 n 是两数 $|m|$ 及 $|M|$ 中的較大者，而既然 λ 是实数，

$$(\lambda f(\lambda), g(\lambda))=(f(\lambda), \lambda g(\lambda))=\int_m^M \lambda f(\lambda)\overline{g(\lambda)}d\rho(\lambda)。$$

現在找出空間 C_x 及函数空間 $L_2^{(\rho)}$ 的联系来。既然黑林格尔积分(166)存在，C_x 中的任意元 y 必与 $L_2^{(\rho)}$ 中的一个函数 $y(\lambda)$ 相应，使[85]

$$\varphi_y(\lambda)=(y, \mathscr{E}_\lambda x)=\int_m^\lambda y(\mu)d\rho(\mu)。 \tag{193}$$

在这对应中，C_x 中不同的元 y 与 z 必对应 $L_2^{(x)}$ 中不同的元 $y(\lambda)$ 及 $z(\lambda)$。事实上，如果元 y 及 z 与相抵函数 $y(\lambda)$ 及 $z(\lambda)$ 对应，那末依(193)，$(y-z, \mathscr{E}_\lambda x)=0$ 对于任意 λ 成立。所以差 $y-z$ 必与 $\mathscr{E}_\lambda x$ 的一切一次組合式正交，而取極限可知差 $y-z$ 必与整个子空間 C_x 正交。但 $y-z\in C_x$，所以 $(y-z, y-z)=\|y-z\|^2=0$，就是說 $y=z$。反之，对于 $L_2^{(x)}$ 中两个不相抵的函数，公式(193)中的积分不能对于一切 λ 值都有同一值[53]。如此公式(193)建立了在 C_x 中的元 y 与 $L_2^{(x)}$ 中某一綫性簇 M 的元間的一一对应。現在証明 M 与 $L_2^{(x)}$ 重合。首先証明 M 是閉綫性簇。应用[86]中勒貝格-斯提勒杰斯积分的形式，可以把公式(173)写成

$$(y, z)=\int_m^M y(\lambda)\overline{z(\lambda)}\,d\rho(\lambda), \tag{194}$$

其中 $z(\lambda)$ 是 $L_2^{(x)}$ 中与 C_x 中的元 z 相应的元，就是說

$$(z, \mathscr{E}_\lambda x)=\int_m^\lambda z(\mu)\,d\rho(\mu)。 \tag{195}$$

設 $y^{(n)}(\lambda)$ 是 M 中的元序列，而 $y^{(n)}$ 是其在 C_x 中的相应元。在公式(194)中令 $y=z=y^{(n)}-y^{(m)}$，可得

$$\|y^{(n)}-y^{(m)}\|^2=\int_m^M |y^{(n)}(\lambda)-y^{(m)}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda)。 \tag{196}$$

如果 $y^{(n)}(\lambda)$ 依中值趋向于 $L_2^{(x)}$ 中的一元 $y_0(\lambda)$，那末当 n 及 $m\to\infty$ 时，(196)的右边趋向于零，因此元序列 $y^{(n)}$ 自收斂，从而必存在一元 u，使 $y^{(n)}\to u$，而 $u\in C_x$，因为 C_x 是子空間。設 $u(\lambda)$ 是在 M 中与元 u 依公式(193)相应的元。現在証明 $u(\lambda)$ 与 $y_0(\lambda)$ 相抵。由此可知 $y_0(\lambda)\in M$，就是說 M 是閉綫性簇。由公式(194)，当 $y=z=u-y^{(n)}$ 时，可得公式

$$\|u-y^{(n)}\|^2=\int_m^M |u(\lambda)-y^{(n)}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda),$$

由此可以看出 $y^{(n)}(\lambda)$ 依中值收斂于 $u(\lambda)$，因此函数 $u(\lambda)$ 与 $y_0(\lambda)$

相抵，因为依中值的極限是唯一的。现在証明閉綫性簇 M 与 $L_2^{(\rho)}$ 相重合。如果不然，那末必存在 $L_2^{(\rho)}$ 中的元 $f_0(\lambda)$，与零元不相抵，并与 M 中一切元正交。既然当 $\nu\leqslant\lambda$ 时 $\mathscr{E}_\nu\mathscr{E}_\lambda=\mathscr{E}_\nu$，而当 $\nu\geqslant\lambda$ 时 $\mathscr{E}_\nu\mathscr{E}_\lambda=\mathscr{E}_\lambda$，对于元 $y=\mathscr{E}_\nu x$，公式(193)可以写成下面形式：

$$(\mathscr{E}_\nu x,\ \mathscr{E}_\lambda x)=(x,\ \mathscr{E}_\nu\mathscr{E}_\lambda x)=\|\mathscr{E}_\nu\mathscr{E}_\lambda x\|^2=\int_m^\nu d\rho(\lambda)\ \text{当}\ \lambda\geqslant\nu\ \text{时},$$

$$(\mathscr{E}_\nu x,\ \mathscr{E}_\lambda x)=\int_m^\lambda d\rho(\lambda)\ \text{当}\ \lambda\leqslant\nu\ \text{时},$$

就是說，在 M 中与 $\mathscr{E}_\nu x$ 相应的函数与由下面公式定义的函数相抵：

$$\text{当}\ \lambda<\nu\ \text{时}\ f(\lambda)=1,\quad \text{当}\ \lambda>\nu\ \text{时}\ f(\lambda)=0。$$

既然 $\rho(\lambda)$ 是連續的，当 $\lambda=\nu$ 时 $f(\lambda)$ 的值无关重要。因为 $f_0(\lambda)$ 与剛才定义的函数正交，所以对于任意 ν：

$$\int_m^\nu f_0(\lambda)d\rho(\lambda)=0,$$

由此，由[53]，可知 $f_0(\lambda)$ 依 $\rho(\lambda)$ 与零相抵，如此子空間 M 必然与 $L_2^{(\rho)}$ 重合。由上面的推理可得下面定理：

定理 42. 公式(193)建立了 C_x 中的元 y 与 $L_2^{(\rho)}$ 中的元 $y(\lambda)$ 之間的一一对应。

依(194)，这对应关系保存数积，所以相应元的范数是一样的。此外，因为数积 $(y,\ \mathscr{E}_\lambda x)$ 是依 y 分配的，又因公式(193)中积分是分配的，这对应关系也是分配的。如此在上面的对应中，函数空間 $L_2^{(\rho)}$ 是希勒柏特空間 C_x 的具体表現。在这空間中定义了运算子 A，而 $\mathscr{E}_\lambda$ 乃是 A 的譜函数。现在証明下面的定理：

定理 43. C_x 中把 y 換成 Ay 与 $L_2^{(\rho)}$ 中以 μ 乘 $y(\mu)$ 相应，就是說，C_x 中的运算子 A 与 $L_2^{(\rho)}$ 中乘以自变数的运算子(192)相对应。

应用公式(129)及(193)，及[75]中勒贝格–斯提勒杰斯积分的性質，当設 $y\in C_x$ 时，可得

$$(Ay,\ \mathscr{E}_\lambda x)=\int_m^M \mu d_\mu(\mathscr{E}_\mu y,\ \mathscr{E}_\lambda x)=\int_m^\lambda \mu d_\mu(y,\ \mathscr{E}_\mu x)=$$

$$=\int_m^\lambda \mu d_\mu\left[\int_m^\mu y(\nu)d\rho(\nu)\right]=\int_m^\lambda \mu y(\mu)d\rho(\mu),$$

就是說：

$$(Ay,\ \mathscr{E}_\lambda x)=\int_m^\lambda \mu y(\mu)d\rho(\mu),$$

由此，并比較公式(193)，可知以 Ay 代換 y 与以 μ 乘 $y(\mu)$ 相应。再注意当 y 及 $z\in C_2$ 时，对于双綫性泛函 (Ay,z) 的一般公式(175)依(194)及刚証了的定理可以借助勒貝格-斯提勒杰斯积分表成：

$$(Ay,\ z)=\int_m^M \lambda y(\lambda)\overline{z(\lambda)}d\rho(\lambda)。\tag{197}$$

121．么范运算子　除自共轭运算子之外，还要考察一类重要的綫性运算子。

定义　(定义于整个空間 H 上的)綫性运算子

$$y=Ux\tag{198}$$

叫做么范的，是指它不改变元的范数，就是說 $\|Ux\|=\|x\|$，并且把 H 映像到整个 H 之上，就是說，对于 H 中任意元 y，必存在一原像 x，满足公式(198)。

在下面定理中，将舉出么范运算子的一切基本性質。注意，由定义直接可知么范运算子的范数等于1。

定理 44．　么范运算子把 H 一对一地映像于 H 中，并有一有界逆运算子，后者由下面公式决定：

$$U^{-1}=U^*,\tag{199}$$

就是說

$$UU^*=U^*U=E,\tag{200}$$

其中 U^{-1} 也是么范运算子，而 U 不改变数积。条件(200)也是 U 为么范运算子的充分条件。

如果 x_1 及 x_2 是 H 中两元，那末依么范运算子的定义，$\|Ux_1-Ux_2\|=\|U(x_1-x_2)\|=\|x_1-x_2\|$，因此，如果 $Ux_1=Ux_2$，則 $x_1=x_2$，就是說对于不同的元 x，由公式(198)也得出不同的 y，就是說 U 决定了 H 映像于自己之上的一个一对一映像。如此存在有界的逆运算子 U^{-1}，后者定义于整个 H 上，而既然 U 不改变范数，$\|U^{-1}y\|=\|y\|$，就是說 U^{-1} 也是么范的。留意范数的不变性，可知 $(Ux, Ux)=(x, x)$，由此直接可得等式

$$(U^*Ux, x)=(x, x)。$$

但是上面二次泛函的等式与其相应运算子的等式同效，就是說 $U^*U=E$，由此可知 U^* 是 U 的左逆，而既然 U 的有界逆运算子存在，可知 $UU^*=E$，于是(199)証明了。关于 U 不改变数积的結論直接由下面等式得出：

$$(Ux, Uy)=(U^*Ux, y)=(x, y)。 \qquad (201)$$

最后証明，由(200)可得 U 是么范运算子。依(200)，U 有由公式(199)定义的有界逆运算子。剩下的只是証明 U 不改变范数。但这由(200)及(201)令 $y=x$ 就得出来。

还要注意，如果 U_1 及 U_2 是两个么范运算子，那末它們的积 U_1U_2 也是么范运算子。事实上，U_1 及 U_2 都是把 H 一对一地映像于它自己之上，并不改变范数，所以它們的积也具有这两性質。如此，么范运算子的逆也是么范的，么范运算子的积也是么范运算子，就是說么范运算子組成一个群。

設空间 H 是可分的，并設

$$x_1, x_2, x_3, \cdots \qquad (202)$$

是閉規格化正交組。使用么范映像 U 于它們之上，依 U 的性質，可得規格化正交組

$$y_1=Ux_1;\ y_2=Ux_2;\ y_3=Ux_3;\ \cdots。 \qquad (203)$$

任意元 x 可以依(202)中的諸元分解成

$$x=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots,\tag{204}$$

从而其像 Ux 也可以依組(203)分解,其系数相同:

$$Ux=a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3+\cdots。\tag{205}$$

元 Ux 可以表 H 中的任意元,所以組(203)是閉的。反之,如果有两个閉規格化正交組 $x_k(k=1, 2, \cdots)$ 及 $y_k(k=1, 2, \cdots)$,我們对于任意表成(204)的元 x 借公式(205)定义 U,那末这运算子一对一地把 H 映像到 H 之上,并且不改变范数

$$\|Ux\|^2=\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2,$$

就是說这样的运算子 U 是么范的。如此凡么范运算子可以借一个閉規格化正交組的元在另一个这种組的元上的映像决定。

設 A 是某一綫性运算子,而 $y=Ax$。取一么范运算子 U,并設 $y'=Uy$, $x'=Ux$。既然 $y=Ax$,可以依下面公式用 x' 表示出 y':

$$y'=(UAU^{-1})x',\tag{206}$$

而我們說运算子 $B=UAU^{-1}$ 么范地与 A 相抵。由上面公式可知 $A=U^{-1}BU$,由此可以看出如果 B 么范地与 A 相抵,那末 A 也么范地与 B 相抵。如果 P 是在子空間 L_p 中的投影运算子,那末 UPU^{-1} 显然是在应用 U 于子空間 L_p 而得的子空間中的投影运算子。如果 x_0 是 A 的固有元,并与固有值 λ_0 相应,就是說 $Ax_0=$ $=\lambda_0x_0$,那末令 $x_0'=Ux_0$,可得 $(UAU^{-1})x_0'=\lambda_0x_0'$,就是說么范相抵的运算子具有相同的固有值,但这两运算子的固有元是由相应的么范映像联系着。应用(199)可知:如果 A 是自共軛运算子,那末 B 也是自共軛运算子。

如果 $\mathscr{E}_\lambda$ 是运算子 A 的譜函数,那末 $\mathscr{E}'_\lambda=U\mathscr{E}_\lambda U^{-1}$ 也具有主單位元分解的一切性質,而与它相应的运算子 $B'x$ 由和

$$\sum_{k=1}^{n}\nu_k\Delta_k(U\mathscr{E}_\lambda U^{-1})x=U\left(\sum_{k=1}^{n}\nu_k\Delta_k\mathscr{E}_\lambda\right)U^{-1}x$$

的極限决定,由此可以看出 B' 与 B 重合,就是說 $\mathscr{E}'_\lambda=U\mathscr{E}_\lambda U^{-1}$ 是

运算子 B 的譜函数。由此可知么范相抵的自共軛运算子一定有同样的譜。

在純点譜的情形下，固有值及其秩的相同对于么范相抵性不仅是必要的，而且是充分的。其相应么范运算子 U 很容易构成，它乃是把 B 的固有元子空間映像成 A 的与相同的固有值相应的固有元子空間者。关于么范相抵性的条件的問题在有連續譜的情形下远較复杂。現在举出在这情形下的基本結果，而不加証明(設空間是可分的)。

为了两自共軛运算子 $A^{(1)}$ 及 $A^{(2)}$ 么范相抵，必須而且只須滿足下列条件：(1) 这两运算子的譜屬于同一类型(純点譜、純連續譜、或是混合譜)；(2) 在有点譜的情形下点譜是由对于两个运算子有相同秩的相同值組成的；(3) 在有連續譜的情形下两运算子的譜函数連續部分的正常分解中不变子空間数目是一样的，而如果对于 $A^{(1)}$ 及 $A^{(2)}$ 的連續譜正常表現取函数

$$\|\mathscr{E}_\lambda^{(1)} y_k^{(1)}\|^2=\rho_k^{(1)}(\lambda),\quad \|\mathscr{E}_\lambda^{(2)} y_k^{(2)}\|^2=\rho_k^{(2)}(\lambda),$$

就是在[117]中所作的，那末依 $\rho_k^{(1)}(\lambda)$ 測度为零的集合依 $\rho_k^{(2)}(\lambda)$ 也是測度为零的，反之也是如此，就是說，对于一切 k，

$$\rho_k^{(1)}(\lambda)=\int_m^\lambda \varphi_k^{(1)}(\lambda)\,d\rho_k^{(2)}(\lambda),$$

$$\rho_k^{(2)}(\lambda)=\int_m^\lambda \varphi_k^{(2)}(\lambda)\,d\rho_k^{(1)}(\lambda),$$

其中 $\varphi_k^{(1)}(\lambda)$ 是依 $\rho_k^{(2)}(\lambda)$ 可測的，非負的，可和的，$\varphi_k^{(2)}(\lambda)$ 也是滿足相似条件的。

122. 么范运算子的譜分解 現在証明下面关于么范运算子的固有值及固有元的定理。

定理 45. 么范运算子的固有值的絕对值等于 1，而其与不同的固有值相应的固有元必相互正交。

設 U 是么范运算子，而 x_0 是与它的固有值 λ_0 相应的固有元，就是說，$Ux_0=\lambda_0 x_0$。U 既然不改变范数，可知

$$(x_0,\ x_0)=(Ux_0,\ Ux_0)=(\lambda_0 x_0,\ \lambda_0 x_0)=$$
$$=|\lambda_0|^2(x_0,\ x_0),$$

就是說 $\|x_0\|=|\lambda_0|\|x_0\|$，因为 $\|x_0\|\neq 0$，可知 $|\lambda_0|=1$。設 x_0 及 x_1 是与不同的固有值 λ_0 及 λ_1 相应的固有元，就是說 $Ux_0=\lambda_0 x_0$，$Ux_1=\lambda_1 x_1$。因为 U 不改变数积，可知

$$(x_0,\ x_1)=(Ux_0,\ Ux_1)=(\lambda_0 x_0,\ \lambda_1 x_1)=\lambda_0\bar{\lambda}_1(x_0,\ x_1)。$$

如果 $(x_0,\ x_1)\neq 0$，那末由上面等式可知 $\lambda_0\bar{\lambda}_1=1$。但依上面所証明的，$|\lambda_0|=1$，所以 $\bar{\lambda}_1=1/\lambda_0=\bar{\lambda}_0$，就是說 $\lambda_1=\lambda_0$，但这是不可能的，因为 λ_0 与 λ_1 不同。

設 A 是某一自共軛运算子，而 $\mathscr{E}_\lambda$ 是它的譜函数，其中

$$\text{当 } \lambda=0 \text{ 时 } \mathscr{E}_\lambda=0,\quad \text{当 } \lambda=1 \text{ 时 } \mathscr{E}_\lambda=E。\tag{207}$$

依下面公式作运算子 U：

$$U=\int_0^1 e^{2\pi i\lambda}d\mathscr{E}_\lambda=e^{2\pi iA}。\tag{208}$$

为了作共軛运算子，只須用 $e^{-2\pi i\lambda}$ 代替 $e^{2\pi i\lambda}$[110]，就是

$$U^*=\int_0^1 e^{-2\pi i\lambda}d\mathscr{E}_\lambda,$$

而依公式 (134_1)，可得公式 (200)，就是說由公式(208)定义的运算子 U 在条件 (207) 之下乃是么范运算子。我們陈述其逆定理，而不加証明[1]：

定理 46. 如果取一切可能满足 (207) 的主單位元分解，那末公式(208)表現出么范运算子的一般形式，其中不同的主單位元分解 $\mathscr{E}_\lambda$ 与不同的么范运算子相应。

在[110]中曾定义了自共軛运算子 A 的与連續函数 $f(t)$ 相应

[1] 譯者注：証明可見 Béla v. Sz. Nagy 書第 27 頁。

的函数$f(A)$。在下节中将把这定义推广到更寬广一类的函数$f(t)$上去。

123. 自共軛运算子的函数 設A是某一自共軛运算子，而$\mathscr{E}_\lambda$是其譜函数。如果$f(\lambda)$是在区間$[m, M]$中連續的，那末运算子$f(A)$可以由下面公式定义

$$f(A)=\int_m^M f(\lambda)d\mathscr{E}_\lambda,$$

或同效地用双綫性泛函的公式定义：

$$(f(A)x, y)=\int_m^M f(\lambda)d(\mathscr{E}_\lambda x, y), \tag{209}$$

其中$(\mathscr{E}_\lambda x, y)$是$\lambda$的复值囿变函数。但,在[29]中已知，这数积乃是四个作$\|\mathscr{E}_\lambda z\|^2$形的不減函数的一次組合式，其中$z$是$H$中的元。如此，如果$f(\lambda)$是任意有界函数，并对于任意$z$依不減函数

$$\|\mathscr{E}_\lambda z\|^2 \tag{210}$$

是可測的，那末积分(209)对于任意的x及y都成立，从而双綫性泛函$(f(A)x, y)$是定义了的。这泛函是分配的，因为$(\mathscr{E}_\lambda x, y)$是分配的。現在証明这泛函的有界性，并且在証明时設$f(\lambda)$是实函数，因为这一限制事实上并无关宏旨。依函数$f(\lambda)$的有界性，存在一正数$C$，使$|f(\lambda)|\leqslant C$。設$y=x$，可得二次泛函的表示

$$(f(A)x, x)=\int_m^M f(\lambda)d\|\mathscr{E}_\lambda x\|^2。 \tag{211}$$

应当提醒，如果$\mathscr{E}_m$不等于零，那末上面的积分与下面的和是同値的：

$$f(m)\|\mathscr{E}_m x\|^2+\int_m^M f(\lambda)d\|\mathscr{E}_\lambda x\|^2,$$

其中的最后項积分应了解成和的平常極限。由不等式$|f(\lambda)|\leqslant C$及$\|\mathscr{E}_M x\|=\|x\|$可知对于积分(211)有下面的估値：

$$|(f(A)x, x)|\leqslant C\|x\|^2。$$

此外，用 R 表示实数部分，可知

$$4R\int_m^M f(\lambda)d(\mathscr{E}_\lambda x, y) =$$

$$= \int_m^M f(\lambda)d(\mathscr{E}_\lambda(x+y), x+y) -$$

$$- \int_m^M f(\lambda)d(\mathscr{E}_\lambda(x-y), x-y),$$

即

$$4R\int_m^M f(\lambda)d(\mathscr{E}_\lambda x, y) =$$

$$= \int_m^M f(\lambda)d\|\mathscr{E}_\lambda(x+y)\|^2 - \int_m^M f(\lambda)d\|\mathscr{E}_\lambda(x-y)\|^2,$$

而依(211)，

$$4\left|R\int_m^M f(\lambda)d(\mathscr{E}_\lambda x, y)\right| \leqslant$$

$$\leqslant C[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2] = 2C[\|x\|^2 + \|y\|^2]。$$

像証明定理 3 时那样来推理，由这恒等式直接可得不带实数部分記号的公式：

$$4\left|\int_m^M f(\lambda)d(\mathscr{E}_\lambda x, y)\right| \leqslant 2C[\|x\|^2 + \|y\|^2]。$$

如果 $\|x\| = \|y\| = 1$，可得

$$|(f(A)x, y)| = \left|\int_m^M f(\lambda)d(\mathscr{E}_\lambda x, y)\right| \leqslant C。 \tag{212}$$

如果 x 及 y 有任意的范数，那末

$$(f(A)x, y) = \|x\|\cdot\|y\|\cdot\left(f(A)\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right),$$

而元 $\frac{x}{\|x\|}$ 及 $\frac{y}{\|y\|}$ 的范数等于 1，从而

$$|(f(A)x, y)| \leqslant C\|x\|\cdot\|y\|,$$

由此可知双綫性泛函 $(f(A)x, y)$ 是有界的。

如此，可得下面的基本結果：如果 $f(\lambda)$ 是有界函数，并且对于

任意 z 依不减函数(210)都是可测的，那末公式(209)定义一个綫性运算子 $f(A)$。注意运算子 $f(A)$ 的几个性質。如果 $f(\lambda)$ 是实数，那末由(209)，当 $y=x$ 时，直接可知 $f(A)$ 是自共軛运算子。如果 $f(\lambda)$ 是复数値的，那末共軛运算子 $f(A)^*$ 可由公式(209)以 $f(\lambda)$ 的共軛函数代替它而得出来。如果 $f(\lambda)\geqslant 0$，那末由(211)可知 $f(A)$ 是正运算子。考察由下面方式定义的函数 $f_\mu(\lambda)$：

$$\text{当 } \lambda\leqslant\mu \text{ 时 } f_\mu(\lambda)=1, \quad \text{当 } \lambda>\mu \text{ 时 } f_\mu(\lambda)=0。 \tag{213}$$

这函数显然是 B 函数，我們可以作积分(209)。分解积分域成 $[m-\varepsilon_0,\ \mu]$ 及 $[\mu,\ M]$，可得

$$(f_\mu(A)x,\ y)=\int_m^\mu d(\mathscr{E}_\lambda x,\ y)=(\mathscr{E}_\mu x,\ y),$$

由此可得

$$\mathscr{E}_\mu=f_\mu(A)。 \tag{214}$$

我們得到这公式，是曾假設凡自共軛运算子 A 必有譜函数 $\mathscr{E}_\lambda$，借这些譜函数 A 可以由公式(127)表出，就是說在得公式(214)时曾依靠了定理 29，而这是我們未曾証明的。这証明将基本上簡化成下面的情形：即我們就任意自共軛运算子 A 定义函数 $f_\mu(A)$，而不使用譜函数 $\mathscr{E}_\lambda$，并且令 $\mathscr{E}_\mu=f_\mu(A)$，然后再証基本公式(127)。

再举一例，这例在以后将起相当的作用。設 A 是正运算子，就是說 $m\geqslant 0$，并設 $f_0(\lambda)=\sqrt{\lambda}$，其中只取根的算术値，而当 $\lambda<0$ 时令 $f_0(\lambda)=0$。这时可以定义正运算子 $\sqrt{A}$：

$$(\sqrt{A}\,x,\ y)=\int_m^M\sqrt{\lambda}\,d(\mathscr{E}_\lambda x,\ y),$$

或者簡写：

$$\sqrt{A}=\int_m^M\sqrt{\lambda}\,d\mathscr{E}_\lambda,$$

因为在这情形下函数 $\sqrt{\lambda}$ 是連續的。依(134_1)，显然 $(\sqrt{A})^2=A$。

应用勒貝格-斯提勒杰斯积分的已知性質很容易求出自共軛运算子 A 的函数的性質。这时将設我們所論的一切函数 $f(\lambda)$ 都屬

于上面所定的类，就是說都是有界的，并且对于任意 x 都依(210)中的函数可测。

定理 47. 1. 函数的一次組合式 $a_1f_1(\lambda)+a_2f_2(\lambda)+\cdots+a_pf_p(\lambda)$ 与运算子 $a_1f_1(A)+a_2f_2(A)+\cdots+a_pf_p(A)$ 对应。

2. $f(A)$ 与 $\mathscr{E}_\mu$ 及 A 都交换。

3. 下面公式成立:

$$(f_1(A)x, f_2(A)y)=\int_m^M f_1(\lambda)\overline{f_2(\lambda)}\,d(\mathscr{E}_\lambda x, y)。\tag{215}$$

4. 函数 $f_1(\lambda)f_2(\lambda)$ 与下面的运算子相应:

$$f_1(A)f_2(A)=f_2(A)f_1(A)。\tag{216}$$

例如可以証明 $f(A)$ 与 $\mathscr{E}_\mu$ 相交換:

$$\begin{aligned}(f(A)\mathscr{E}_\mu x, y)&=\int_m^M f(\lambda)\,d(\mathscr{E}_\lambda\mathscr{E}_\mu x, y)=\\&=\int_m^M f(\lambda)\,d(\mathscr{E}_\lambda x, \mathscr{E}_\mu y)=\\&=(f(A)x, \mathscr{E}_\mu y)=(\mathscr{E}_\mu f(A)x, y),\end{aligned}$$

由此可知 $f(A)\mathscr{E}_\mu=\mathscr{E}_\mu f(A)$。再留意，由上面的公式，依(104)可得下面的公式:

$$(f(A)\mathscr{E}_\mu x, y)=\int_m^\mu f(\lambda)\,d(\mathscr{E}_\lambda x, y)。\tag{217}$$

公式(215)可以由下面一串等式得出:

$$\begin{aligned}(f_1(A)x, f_2(A)y)&=\int_m^M f_1(\lambda)\,d(\mathscr{E}_\lambda x, f_2(A)y)=\\&=\int_m^M f_1(\lambda)\,d\overline{(f_2(A)\mathscr{E}_\lambda y, x)}=\\&=\int_m^M f_1(\lambda)\,d\overline{\left[\int_m^\lambda f_2(\mu)\,d(\mathscr{E}_\mu y, x)\right]}=\\&=\int_m^M f_1(\lambda)\overline{f_2(\lambda)}\,d(\mathscr{E}_\lambda x, y)。\end{aligned}\tag{217$_1$}$$

最后，

$$(f_1(A)f_2(A)x, y)=\int_m^M f_1(\lambda)d(\mathscr{E}_\lambda f_2(A)x, y)=$$

$$=\int_m^M f_1(\lambda)d\int_m^\lambda f_2(\mu)d(\mathscr{E}_\mu x, y)=\int_m^M f_1(\lambda)f_2(\lambda)d(\mathscr{E}_\lambda x, y),$$

而对于积 $f_2(A)f_1(A)$ 也有同样公式。与在[110]中完全一样，可以証明 $f(A)$ 与凡与 A 交換的运算子 B 都相交換。逆命題也是正确的：如果有界綫性运算子 C 与任意与 A 交換的运算子 B 都相交換，那末必存在一函数 $f(\lambda)$，使 $C=f(A)$。这重要命題的証明可參看弗雷德利克·栗斯的論文"論希勒柏特空間中埃尔密特运算子的函数"（見数学科学的进展，卷九）①。

如果在公式(217_1)中令 $f_2(\lambda)\equiv f_1(\lambda)$，及 $y=x$，可得

$$\|f_1(A)x\|^2=\int_m^M |f_1(\lambda)|^2 d\|\mathscr{E}_\lambda x\|^2。\qquad (217_2)$$

还要注意一些有关自共軛运算子的函数的簡單事实。如果 $|f(\lambda)|\equiv 1$，那末 $f(A)$ 是么范运算子。如果 $f(\lambda)$ 只取值 0 及 1，那末 $f(A)$ 是投影运算子。可以証明，如果 $\lambda=\lambda_0$ 是 A 的固有值，而 x_0 是其相应的固有元，那末 $f(\lambda_0)$ 是 $f(A)$ 的固有值，其相应固有元也是 x_0。我們知道当 $\lambda<\lambda_0$ 时 $\mathscr{E}_\lambda x_0=0$，当 $\lambda\geqslant\lambda_0$ 时 $\mathscr{E}_\lambda x_0=x_0$，而由公式(209)可知对于任意 y，$(f(A)x_0, y)=f(\lambda_0)(x_0, y)=(f(\lambda_0)x_0, y)$，由此，既然 y 是任意的，可知 $f(A)x_0=f(\lambda_0)x_0$。留意如果 $f(\lambda)$ 有有穷多間断点，那末它依(210)中的一切函数可测，所以 $f(A)$ 有意义。当 $f(\lambda)$ 是 B 函数时也是一样[48]，我們在上面已曾引用过了。

124. 交換运算子 考察交換的自共軛运算子的問題。

定理 48. 两自共軛运算子 A 与 B 相交換的必要且充分的条件乃是它們的譜函数 $\mathscr{E}_\lambda$ 及 F_μ 对于一切 λ 及 μ 相交換。

---

① 譯者注：原載 Acta Sci. Math. Szeged 卷 7 (1935)，147—159 頁。參閱 Béla v. Sz. Nagy 書第 63 頁的証明，且 $f(\lambda)$ 可取为拜尔函数。

我們知道任意自共軛运算子 C 的譜函数与 C 并且与任意同 C 交換的运算子交換[110]。由此可知如果 $AB=BA$，那末 F_μ 与 A 交換，所以 $\mathscr{E}_\lambda$ 与 F_μ 交換。反之如果 $\mathscr{E}_\lambda$ 与 F_μ 相交換，那末运算子 A 及 B 的积分表現中的两个黎曼-斯提勒杰斯和相交換，因此这两运算子自已也相交換。

定理 49. 如果自共軛运算子 A, B, C 有純点譜，并且彼此交換，那末有一閉規格化正交組存在，其中的元乃是上面那三个运算子中每个的固有元。

設 $\mathscr{E}_\lambda$，F_μ 及 G_ν 是上面那三个运算子的譜函数。依定理 48 它們是相互交換的。設 λ，μ，ν 各是运算子 A, B, C 的固有値，而 L_λ，M_μ，N_ν 各是其相应固有元的子空間。設 $\Delta'_\lambda=\mathscr{E}_\lambda-\mathscr{E}_{\lambda-0}$；$\Delta''_\mu=F_\mu-F_{\mu-0}$；$\Delta'''_\nu=G_\nu-G_{\nu-0}$，这些正是在这些子空間中的投影运算子。这些投影运算子相互交換，因此它們的积

$$\Delta_{\lambda\mu\nu}=\Delta'_\lambda\Delta''_\mu\Delta'''_\nu$$

是在 L_λ，M_μ，N_ν 的共同部分 $R_{\lambda\mu\nu}$（也是子空間）中的投影运算子[107]。如果取两个不同的这种子空間 $R_{\lambda\mu\nu}$ 及 $R_{\lambda'\mu'\nu'}$，那末至少諸数偶 (λ,λ')，(μ,μ')，(ν,ν') 中有一个是由不同数組成的。例如設 $\lambda\neq\lambda'$。如此，如果 $x\in R_{\lambda\mu\nu}$，$x'\in R_{\lambda'\mu'\nu'}$，那末 x 及 x' 是 A 的固有元，并且与不同的固有值相应，因此它們是相互正交的。如此諸子空間 $R_{\lambda\mu\nu}$ 是相互正交的。現在証明，它們的正交和乃是整个 H。关于这層，只須証明不能有一个与一切子空間 $R_{\lambda\mu\nu}$ 正交的非零元存在，就是說只須証明如果元 x_0 与零不同，那末它至少与一个 $R_{\lambda\mu\nu}$ 不正交。对于子空間 L_λ，M_μ，N_ν，这是显然的，因为依条件 A, B, C 有純点譜，因此諸 L_λ 的正交和是整个 H。取一元 $x_0\neq 0$。依剛才所說过的，有一运算子 A 的固有値 λ 存在，使 $\Delta'_\lambda x_0\neq 0$。同样必有运算子 B 的一个固有值 μ 存在，使 $\Delta''_\mu(\Delta'_\lambda x_0)\neq 0$，也有运算子 C 的一个固有值 ν 存在，使 $\Delta'''_\nu(\Delta''_\mu\Delta'_\lambda x_0)\neq 0$，由此可知 x_0 与 $R_{\lambda\mu\nu}$ 不正交。如此諸 $R_{\lambda\mu\nu}$ 的正交和乃是 H。如果在每个 $R_{\lambda\mu\nu}$ 中取一閉規格化正交組，那末可得 H 中的一个閉規格化正交組，而且这組中的每个元必屬于某一 $R_{\lambda\mu\nu}$，所以是每个运算子 A, B, C 的固有元。对于任意有穷多相互交換的自共軛运算子，定理也可以完全同样地証明。以前曾看到同一个自共軛运算子的不同函数是交換的运算子[123]。現在对于有純点譜的运算子証明逆命題。

定理 50. 如果自共軛运算子 A, B, C 是有純点譜的，并且相互交換，那末它們必是同一自共軛运算子的函数①。

---

① 譯者注：关于一般情形的証明可參看 Béla v. Sz. Nagy 書第 67 頁。

設空間 H 是可分的。依定理 49，有一閉規格化正交組

$$x_1, x_2, x_3, \cdots$$

存在，其中諸元都同时是 A, B 及 C 的固有元，就是說

$$Ax_n = \lambda_n x_n;\ Bx_n = \mu_n x_n;\ Cx_n = \nu_n x_n \quad (n = 1, 2, \cdots)。$$

取一数列 ρ_m，例如設 $\rho_m = \frac{1}{m}$。設 x 是任意元。它可以依諸元 x_k 分解：

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k,$$

而我們定义一自共軛运算子 D，設

$$Dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \rho_k x_k。$$

右边的級数显然是收斂的，因为既然数 $|a_k|^2$ 組成收斂級数，那末数 $|a_k\rho_k|^2$ 更必組成收斂級数。由上面的定义，直接可知 x_k 是 D 的固有元，并与固有值 ρ_k 相应，就是說 D 有純点譜。可以作一有界函数 $f_1(\lambda)$，令它在点 $\lambda=\rho_k$ 处等于 λ_k，并且設它在除 $\lambda=0$ 处以外到处是連續的。同样可以作一具有同类性質的 $f_2(\lambda)$，令它滿足 $f_2(\rho_k)=\mu_k$，同样定义 $f_3(\lambda)$，使 $f_3(\rho_k)=\nu_k$。依上节結果，对于函数 $f_k(\lambda)$ 可以作相应的运算子 $f_1(D)$，$f_2(D)$，$f_3(D)$。运算子 $f_1(D)$ 有固有元 x_k，其相应固有值是 $f_1(\rho_k)=\lambda_k$，而 x_k 成閉組。运算子 A 也有同样的固有值及固有元。但如果两个具有純点譜的运算子具有同样的固有值及同样的相应固有元，那末由它們借譜函数的积分表現式可知这两运算子相同，就是說 $A=f_1(D)$。完全同样可知 $B=f_2(D)$，$C=f_3(D)$。于是定理証明了。留意对于任意有穷多个自共軛运算子，定理也可以同样地証明。如果运算子的譜不是純点的，定理也可以証明，但我們不去討論[①]了（見 J. v. Neumann, Annals of Math.，卷 32, 1931年）。

125. 全連續运算子　現在要考察一种特殊型的运算子。下面将看到，这类运算子見于具有适当性質核的积分方程理論中。首先必須介紹几个新概念。

定义 1. 空間 H 中一些元 x 的集合 M 叫做列紧集合，是指由屬于 M 的任意元序列 x_n 中可以取一部分序列 x_{n_k}，使后者有極限元。

① 見 886 頁譯者注。

定义 2. 元 x 的集合 M 叫做有界集合，是指凡屬于 M 中的元的范数都不超过某一固定的正数。

对于复数，凡依絕对值有界的复数集合必是列緊的[13]。对于无穷維的希勒柏特空間这命題并不成立。例如取空間 l_2 的序列：

$$x_1(1,0,0,\cdots);\ x_2(0,1,0,\cdots);\ x_3(0,0,1,0,\cdots),\ \cdots,$$

这些元的范数都等于1，而对于任意 $p\neq q$，$\|x_p-x_q\|^2=2$。如此这集合有界，但不是列緊的。

留意凡列緊集合必然是有界的。事实上，如果不然，那末可以在其中取一序列元 $x_k(k=1,2,\cdots)$，使其范数趋向于 $+\infty$，而由这序列不可能取出任何有極限元的部分序列来。

定义 定义于整个 H 上并分配的运算子 A 叫做全連續的，是指它把任意有界集合都映像成列緊集合。

依定义运算子 A 把規格化元 x 的集合（即凡范数等于1的元所組成的集合）映像成列緊集合 Ax。所以在 $\|x\|=1$ 的条件下，$\|Ax\|$ 为某一定数 l 所界，就是說当 $\|x\|=1$ 时 $\|Ax\|\leqslant l$，也就是說，凡全連續的运算子必是有界綫性运算子。現在証明几个关于全連續运算子的定理。

輔助定理 有界运算子 B 把列緊集合映像成列緊集合。

設 M 是某一列緊集合，而 M_1 是映像 B 把集合 M 变換而得的像集合。M_1 中的任意序列必作下列形式：$Bx_n(n=1,2,\cdots)$，其中 x_n 是 M 中一序列。必須証明，由序列 Bx_n 中可以取一部分序列，使后者有極限元。依 M 的列緊性，由序列 x_n 可以取一部分序列 x_{n_k}，使后者有極限元；$x_{n_k}\to x$。依运算子 B 的連續性，可知 $Bx_{n_k}\to Bx$，就是說由序列 Bx_n 中可以取出有極限元的部分序列 Bx_{n_k}；于是輔助定理証明了。

还要注意，不变映像 $Ex=x$ 不是全連續映像。事实上，E 把

任意有界集合映像成它自己。但,前面已經看到,有不列緊的有界集合存在。运算子 E 把这一有界集合仍映像成它自己,就是說映像成不列緊的集合,所以 E 不是全連續运算子。

定理 51. 如果 A 是全連續运算子, B 是有界运算子,那末映像 AB 及 BA 都是全連續运算子。全連續运算子沒有有界逆运算子。

有界运算子 B 把元 x 的任意有界集合仍映像成元 Bx 的有界集合;然后全連續运算子 A 把有界集合 Bx 映像成列緊集合 ABx,就是說 AB 是全連續运算子。A 把元 x 的一切有界集合映像成列緊集合 Ax, 而依輔助定理, B 把这列緊集合 Ax 映像成列緊集合 BAx, 就是說 BA 也是全連續运算子。如果全連續运算子 A 有有界逆运算子 A_1, 那末由公式 $AA_1=E$ 及上面所証明的將会得出运算子 E 也是全連續的結論,而这不合于事实。

还要注意全連續运算子的一个初等性質。如果 $A_k(k=1, 2, \cdots, m)$ 是全連續运算子, 而 c_k 是复数, 那末运算子 $A=c_1A_1+$ $+c_2A_2+\cdots+c_mA_m$ 也是全連續的。

如果 x_n 是任意有界的元序列, 那末由它可以取一部分序列 x_{n_k}, 使序列 $c_1A_1x_{n_k}$ 收斂。由 x_{n_k} 又可以取一部分序列 $x_{n'_k}$, 使部分序列 $c_2A_2x_{n'_k}$ 收斂, 等等。最后可得一部分序列 x_{p_k}, 使凡序列 $c_sA_sx_{p_k}(s=1, 2, \cdots, m)$收斂。但这时序列 Ax_{p_k} 也收斂, 所以 A 是全連續运算子。

可以用譜来完全表現出全連續自共軛运算子的特征。事实上,下面定理成立。

定理 52. 如果自共軛运算子 A 的譜是純点的, 并且沒有异于零的極限点,而其譜中一切异于零的点都具有有穷秩,那末运算子 A 是全連續的。

定理 53. 任意自共軛全連續运算子的譜一定具有在上面定

理中所陈述的性質。

現在証明定理 52，至于定理 53 可以由下节的定理得出，而那些定理的証明不仅并不应用譜函数，并且也不应用完备性公理。現在論定理 52 的証明。設 H 是可分空間。定理对于一般的情形仍成立。由定理的条件可知可以把諸固有值附以标号，写成 $\lambda_k(k=1, 2, \cdots)$，使

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \cdots, \tag{218}$$

其中当 $k\to\infty$ 时 $\lambda_k\to 0$。重复的固有值要分别写出来。設 $z_k(k=1, 2, \cdots)$ 是相应的規格化正交固有元組。依条件这組是閉的。对于元 x,

$$x=\sum_{k=1}^{\infty} a_k z_k; \quad Ax=\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k z_k, \tag{219}$$

其中 $a_k=(x, z_k)$。設 x_n 是有界的元序列，就是說 $\|x_n\|\leqslant l$，而 l 是确定的正数。我們要証明，由元序列 Ax_n 可以取出一个收斂的部分序列来。

对于元 x_n，有分解式

$$x_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(n)} z_k; \quad Ax_n=\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k^{(n)} z_k, \tag{219$_1$}$$

其中 $a_k^{(n)}=(x_n, z_k)$，而由条件 $\|x_n\|\leqslant l$ 可知

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^{(n)}|^2 \leqslant l^2。\tag{220}$$

由这不等式可知对于任意的 k 及 n，$|a_k^{(n)}|\leqslant l$。应用选擇原理[13 及 14]于数列 $a_k^{(n)}$ 上去，可以取一部分序列 n_s，使对于任意 k，数列 $a_k^{(n_s)}$ 有極限：$a_k^{(n_s)}\to a_k$。为了写时簡便，可設对于任意 k 原来的序列 $a_k^{(n)}$ 有極限：

$$\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)}=a_k \quad (k=1, 2, 3, \cdots)。\tag{221}$$

不难看出極限数 a_k 也满足不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2\leqslant l^2。\tag{220$_1$}$$

事实上，如果上面的和 $>l^2$，那末对于足够大的有穷数 m，前 m 項的和已会 $>l^2$：

$$\sum_{k=1}^{m}|a_k|^2>l^2;$$

那末依(221)对于一切足够大的 n 值：

$$\sum_{k=1}^{m}|a_k^{(n)}|^2>l^2,$$

这与(220)冲突。在(219)的第一級数中用由公式(221)所得的数代替 a_k，可知元 x 的范数不超过 l。現在証明等式

$$Ax_n\Rightarrow Ax \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\|Ax-Ax_n\|^2=0,\tag{222}$$

由此就可以得到定理。事实上，

$$\|Ax-Ax_n\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2|a_k-a_k^{(n)}|^2。$$

分解上面和成两部分：

$$\|A\varphi-Ax_n\|^2=\sum_{k=1}^{N}\lambda_k^2|a_k-a_k^{(n)}|^2+\sum_{k=N+1}^{\infty}\lambda_k^2|a_k-a_k^{(n)}|^2,\tag{222$_1$}$$

其中的数 N 在下面将固定。留意 $|a_k-a_k^{(n)}|^2\leqslant 2|a_k|^2+2|a_k^{(n)}|^2$，及不等式(218)，对于第二和可得

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\lambda_k^2|a_k-a_k^{(n)}|^2\leqslant 2\lambda_{N+1}^2\sum_{k=N+1}^{\infty}(|a_k|^2+|a_k^{(n)}|^2)\leqslant$$

$$\leqslant 2\lambda_{N+1}^2\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2+|a_k^{(n)}|^2),$$

而依(220)及(220$_1$)，

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\lambda_k^2|a_k-a_k^{(n)}|^2\leqslant 4l^2\lambda_{N+1}^2。$$

設 ε 是任意預定的正数。留意当 $k\to\infty$ 时 $\lambda_k\to 0$，可以固定一个足够大的数 N，使 $4l^2\lambda_{N+1}^2\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$。这时由公式(222$_1$)可得不等式

$$\|Ax-Ax_n\|^2\leqslant\sum_{k=1}^{N}\lambda_k^2|a_k-a_k^{(n)}|^2+\frac{\varepsilon}{2}。$$

留意(221),可知右边的和对于一切足够大的 n 值不超过 $\frac{\varepsilon}{2}$,就是說对于一切足够大的 n 值,$\|Ax-Ax_n\|^2\leqslant\varepsilon$,而既然 ε 是任意的,可得(222),于是証明了定理。

126. 全連續运算子(續) 在本节中对于自共軛全連續运算子理論作另一种初等的研究,这研究根据于考究規格化元的二次泛函的極大及極小序列。这时我們將到处应用譜函数。完全同样的研究會应用于研究有穷維空間 R_n 中的二次型,以及具有对称核积分方程的固有值的極值問題。

定理 53 (乙) 全連續自共軛运算子 A 至少有一个异于零的固有值;凡异于零的固有值一定有有穷秩,且沒有异于零的凝点,而对于 H 中任意 y,元 Ay 可以依相应于非零固有值的固有元規格化正交組展开成傅立叶級数。

設 A 不是零运算子。依 A 的有界性可知

对于一切 $(x,x)\neq 0$,

$$\frac{|(Ax,x)|}{(x,x)}\tag{223}$$

的上确界存在,并且有穷。用 ν_1 表示它。設 ξ_n 是个元序列,使 $|(A\xi_n,\xi_n)|:(\xi_n,\xi_n)\to\nu_1$。可以設 $\|\xi_n\|=1$,所以 $|(A\xi_n,\xi_n)|\to\nu_1$。如此不等式 $(A\xi_n,\xi_n)>\frac{\nu_1}{2}$ 及 $(A\xi_n,\xi_n)<-\frac{\nu_1}{2}$ 中至少有一个甚或两个都是对无穷多 n 值成立的。設第一个可能性成立。这时設 $\mu_1=\nu_1$,那末取消某些 ξ_n,可設

$$d_n=(A\xi_n,\xi_n)\to\mu_1,\tag{223_1}$$

而对于任意实数 s 及任意元 u,

$$(A(\xi_n+su),\xi_n+su)\leqslant\mu_1(\xi_n+su,\xi_n+su)。\tag{224}$$

这不等式可以改写成下面形式:

$$\varepsilon^2[\mu_1(u, u)-(Au, u)]+2\varepsilon R[\mu_1(u, \xi_n)-(u, A\xi_n)]+$$
$$+\mu_1-d_n\geqslant 0_{\circ}$$

留意左边的三項式对于任意实数 ε 是非負的,可以写成:

$$|R(u, z_n)|\leqslant\sqrt{\mu_1-d_n}\cdot\sqrt{\mu_1\|u\|^2-(Au, u)}, \tag{225}$$

其中我們为了簡便起見利用了下面的縮写:

$$z_n=\mu_1\xi_n-A\xi_{n\circ} \tag{226}$$

留意由运算子 A 的有界性而得出关于二次泛函 (Au, u) 的估計[100],可得

$$0\leqslant\mu_1\|u\|^2-(Au, u)\leqslant c^2\|u\|^2,$$

其中 c 是某一常数,于是不等式(225)可以写成:

$$|R(u, z_n)|\leqslant c\sqrt{\mu_1-d_n}\|u\|_{\circ}$$

与在証明定理 3 时一样地推理,可以在这不等式中取消实数部分記号 R:

$$|(u, z_n)|\leqslant c\sqrt{\mu_1-d_n}\|u\|_{\circ}$$

令 $u=z_n$,可得 $\|z_n\|\leqslant c\sqrt{\mu_1-d_n}$,而留意$(223_1)$及(226),那末

$$\mu_1\xi_n-A\xi_n\Rightarrow 0_{\circ} \tag{227}$$

既然 A 是全連續运算子,而 ξ_n 是規格化的,可以取适当的部分序列并保存原来的記号,而設元序列 $A\xi_n$ 有極限。由此,依(227),可知規格化元 ξ_n 的序列也有極限($\mu_1\neq 0$)。用 x_1 表示这極限,就是說 $\xi_n\Rightarrow x_1$,其中 $\|x_1\|=1$。取公式(227)的極限可得

$$Ax_1=\mu_1x_1, \tag{228}$$

就是說 x_1 是与固有值 μ_1 相应的固有元,于是定理的第一部分証明了。

設 H_2 是由凡与 x_1 正交的元 x 組成的子空間:

$$H_2=\{x|(x, x_1)=0\}_{\circ} \tag{229}$$

我們証明如果 $x\in H_2$,那末 $Ax\in H_{2\circ}$ 事实上,

$$(Ax, x_1) = (x, Ax_1) = (x, \mu_1 x_1) = \mu_1 (x, x_1) = 0。$$

如此 A 可以看做是在 H_2 中的一个全連續自共軛运算子，而 H_2 也可以看做是希勒柏特空間。設 A 不是 H_2 中的零运算子，而 ν_2 是在 H_2 中式(223)的上确界。留意依 H_2 的定义，曾加上了条件(229)，可知 $\nu_2 \leqslant \nu_1$。与上面一样，可以找出一个固有值 μ_2 来，而 $\mu_2 = +\nu_2$ 或 $= -\nu_2$，并找出一个相应的规格化固有元 x_2 来，$x_2 \in H_2$。这时，显然 $|\mu_2| \leqslant |\mu_1|$，而

$$|(Ax, x)| \leqslant |\mu_2| \|x\|^2 \quad (x \in H_2)。 \tag{230}$$

作子空間 H_3，設它是由凡与 x_1 及 x_2 都正交的元所組成的：

$$H_3 = \{x | (x, x_1) = 0 \text{ 及 } (x, x_2) = 0\}。 \tag{231}$$

与上面一样，如果 $x \in H_3$，那末 $Ax_3 \in H_3$，而 A 可以看成是 H_3 中的运算子。如果它不是零运算子，那末可得固有值 μ_3 及属于 H_3 的规格化固有元 x_3。这时 $|\mu_3| \leqslant |\mu_2|$，而 $|\mu_3| = \nu_3$ 是在 $x \in H_3$ 条件下式(223)的上确界，就是說

$$|(Ax, x)| \leqslant |\mu_3| \|x\|^2 \quad (x \in H_3)。$$

再繼續下去，可得固有值 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots, \mu_n$ 及相应的，相互正交的规格化固有元 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$，使

$$|\mu_1| \geqslant |\mu_2| \geqslant |\mu_3| \geqslant \cdots \geqslant |\mu_n|, \tag{232}$$

且

$$|(Ax, x)| \leqslant |\mu_k| \|x\|^2, \tag{233}$$

如果 $\qquad (x, x_1) = (x, x_2) = \cdots = (x, x_{k-1}) = 0。$

設这程序在作下一个固有值时終止，就是說运算子 A 在由条件

$$(x, x_1) = (x, x_2) = \cdots = (x, x_n) = 0 \tag{234}$$

定义的子空間 H_{n+1} 中是零运算子。作元

$$x = y - \sum_{s=1}^{n} (y, x_s) x_s, \tag{235}$$

显然这元满足条件(234)。那末

$$A\left(y-\sum_{s=1}^{n}(y,\ x_s)\ x_s\right)=0,$$

而展开括号,并注意 $Ax_s=\mu_s x_s$, 可得

$$Ay=\sum_{s=1}^{n}(y,\ x_s)\mu_s x_s,$$

就是說任意做 Ay 形式的元可以依固有元 $x_s(s=1,2,\cdots,n)$ 展开。

現在設上面所說的程序可无穷地繼續做下去。首先来証明固有值 μ_n 序列趋向于零。反之,設这固有值序列 μ_n 的極限 μ 不等于零,而 x_n 是与固有值 μ_n 相应的規格化固有元,而 x_n 彼此正交。旣然一切元 x_n 的范数等于 1, 元集合 Ax_n 一定是列緊的。另一方面,留意 x_n 相互正交,可得

$$\|Ax_n-Ax_m\|^2=\|\mu_n x_n-\mu_m x_m\|^2=\mu_n^2+\mu_m^2,$$

而最后的和当 m 及 n 无限地增大时必趋向于 $2\mu^2$, 这極限不等于零,由此可知元集合 Ax_n 不能是列緊的了。如此当无穷地繼續做上面的程序則当 $n\to\infty$ 时一定有 $\mu_n\to 0$。在由条件(234)定义的子空間 H_{n+1} 中,可知

$$|(Ax,\ x)|\leqslant|\mu_{s+1}|\,\|x\|^2,$$

而依[100]中的定理 8; 由此可知运算子 A 在 H_{n+1} 中的范数不大于 $|\mu_{n+1}|$, 所以如果 $x\in H_{n+1}$, $\|Ax\|^2\leqslant|\mu_{n+1}|^2\|x\|^2$, 应用这不等式于元(235), 因为这元 $\in H_{n+1}$, 并留意[95]

$$\left\|y-\sum_{s=1}^{n}(y,\ x_s)x_s\right\|^2=\|y\|^2-\sum_{s=1}^{n}|(y,\ x_s)|^2\leqslant\|y\|^2,$$

可得

$$\left\|A\left(y-\sum_{s=1}^{n}(y,\ x_s)x_s\right)\right\|^2\leqslant|\mu_{n+1}|^2\|y\|^2,$$

所以

$$A\left(y-\sum_{s=1}^{n}(y,\ x_s)x_s\right)=Ay-\sum_{s=1}^{n}(y,\ x_s)\mu_s x_s\to 0. \tag{236}$$

就是說

$$Ay=\sum_{s=1}^{\infty}(y, x_s)\mu_s x_s, \tag{237}$$

于是定理証明了。不难驗明，$(y, x_s)\mu_s$ 是元 Ay 依 x_s 的傅立叶系数。最后証明 x_s 就是运算子 A 的与非零固有值相应的一切綫性无关的固有元。設还有一個有元 z，我們可以設它与一切 x_s 正交[113]。那末有一 $\lambda\neq 0$，$Az=\lambda z$，而 $(z, x_s)=0$。設在 (237) 中，$y=z$，可知 $\lambda z=0$，就是說 $z=0$，这不可能，因为 z 是固有元。

注 1. 留意在証明定理时一概沒有使用空間 H 的完备公理，如此上面定理的結果对于不滿足这公理的空間 H 也是正确的。設完备公理成立。考察級数

$$\sum_{s=1}^{\infty}(y, x_s)x_s。 \tag{238}$$

由 $|(y, x_s)|^2$ 組成的級数收斂[95]，因此級数(238)也收斂，就是說

$$\sum_{s=1}^{n}(y, x_s)x_s\to\sum_{s=1}^{\infty}(y, x_s)x_s。$$

如此依公式(237)：

$$A\left(y-\sum_{s=1}^{\infty}(y, x_s)x_s\right)=0,$$

就是說，在括号中的元 y_0 为运算子 A 映像成零，而对于 H 中的任意元 y：

$$y=\sum_{s=1}^{\infty}(y, x_s)x_s+y_0, \tag{238$_1$}$$

其中 y_0 滿足方程 $Ay_0=0$。如此，如果对于上面所得到的固有元再添上与固有值 $\lambda=0$ 相应的固有元，而这些固有元也是取成相互正交并規格化的，那末可得在 H 中的一个閉組。

注 2. 如果重复平常积分方程論的証明，可得下面的結果：如果 λ 不是固有值，并且不等于零，那末非齐次方程 $Ax=\lambda x+y$ 有唯一解，这解可用公式

$$x=-\frac{1}{\lambda}y+\sum_n\frac{\mu_n(y,x_n)}{\lambda(\mu_n-\lambda)}x_n$$

表示出来。如果 λ 与一个固有値相同，那末为了非齐次方程可解，必須且只須 y 与一切相应的固有元正交。如果这条件滿足，那末有一个解可以由上面的公式表示出来，但必須把其中凡分母等于零的項都取消。还要留意，由定理 53 (乙)直接可得定理 53。

127. 弱收斂 现在对于全連續运算子下另一定义，这与[125]中的基本定义同效。这新定义对于应用更便利。首先介紹一个新概念。

定义 我們說，元序列 x_n 弱收斂于元 x，写成 $x_n\rightharpoonup x$，是指下面两条件滿足：(1)对于任意元 y，

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y)=(x,y),\tag{239}$$

(2)諸元 x_n 的范数从上边为某一正数 l 所界(l 与 n 无关)，就是說

$$\|x_n\|\leqslant l\quad(n=1,2,3,\cdots)。\tag{240}$$

举出一些由定义直接得出的推論。如果 $x_n\rightharpoonup x$ 且 $x_n\rightharpoonup z$，那末 $x=z$。如果 $x_n\Rightarrow x$，那末 $x_n\rightharpoonup x$。逆命題不成立，就是說由弱收斂不能得 $x_n\Rightarrow x$。注意从前所論的收斂 $\Rightarrow$ 有时叫做强收斂。$x_n\rightharpoonup x$ 与 $x_n-x\rightharpoonup 0$ 是同效的。如果 $x_n\rightharpoonup x$ 而 A 是有界綫性运算子，那末 $Ax_n\rightharpoonup Ax$。Ax_n 的范数的有界性可以由 x_n 的范数的有界性及运算子 A 的有界性得出；而性質 $(Ax_n,y)\to(Ax,y)$ 可以由下面关系得出：

$$(Ax_n,y)=(x_n,A^*y)\to(x,A^*y)=(Ax,y)。$$

又由 $y=x$ 时的(239)及(240)可知 $\|x\|\leqslant l$。如果用弱收斂代替强收斂，那末凡有界集合必是列緊的，也就是說下面定理成立：

定理 54. 由每一有界元序列 u_n，

$$\|u_n\|\leqslant l,\tag{241}$$

可以取出一个弱收斂的部分序列来。

將就可分空間 H 来証明本定理。設 $z_k(k=1, 2, \cdots)$ 是一閉規格化正交元組，而 $a_k^{(n)}$ 是元 u_n 对于組 z_k 的傅立叶系数，就是說，$a_k^{(n)}=(u_n, z_k)$。依(241)，

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k^{(n)}|^2 \leqslant l^2, \tag{242}$$

所以 $|a_k^{(n)}|\leqslant l$。应用对角綫程序(見[125])于数 $a_k^{(n)}$ 上，可取出序列 n 的一个部分序列 n_s 来，使 $a_k^{(n_s)}$ 对于任意 k 有極限。为写时简單起見仍保留原来的标号 n，如此可設

$$\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)}=a_k。 \tag{243}$$

由(242)可得[125]

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2 \leqslant l。 \tag{244}$$

如此，数 a_k 决定一元 x：

$$x=\sum_{k=1}^{\infty} a_k z_k,$$

而我們將証明 $u_n \to x$，就是說对于任意 y，$(u_n, y)\to(x, y)$，也就是說

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(n)}\bar{b}_k=\sum_{k=1}^{\infty} a_k\bar{b}_k,$$

其中 b_k 是 y 对于組 z_k 的傅立叶系数，就是說

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-a_k^{(n)})\bar{b}_k=0。 \tag{245}$$

应用[60]中的不等式(106)，及不等式(242)及(244)，可得

$$\left|\sum_{k=N}^{\infty}(a_k-a_k^{(n)})\bar{b}_k\right|^2 \leqslant \sum_{k=N}^{\infty}|a_k-a_k^{(n)}|^2\sum_{k=N}^{\infty}|b_k|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 4l^2\sum_{k=N}^{\infty}|b_k|^2,$$

因为 $$|a_k-a_k^{(n)}|^2 \leqslant 2|a_k|^2+2|a_k^{(n)}|^2。$$

設 ε 是預定的正数。依級数 $\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^2$ 的收斂性，可以固定一数 N_0，使下面不等式成立：

$$\left|\sum_{k=N_0}^{\infty}(a_k-a_k^{(n)})\bar{b}_k\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}。$$

对于出现于(245)中的和，可得

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-a_k^{(n)})\bar{b}_k\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N_0}(a_k-a_k^{(n)})\bar{b}_k\right|+\frac{\varepsilon}{2}。\qquad(246)$$

留意对于一切 k，$a_k^{(n)}\to a_k$，可知公式(246)中右边第一項对于一切足够大的 n 必 $\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$。如此可知

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-a_k^{(n)})\bar{b}_k\right|\leqslant\varepsilon,$$

而既然 ε 是任意的，可得公式(245)，于是定理証明了。

在陈述全連續运算子的新定义之前，首先再証明一个定理。

定理 55. 如果 $x_n\to x$ 而 $y_n\Rightarrow y$，那末 $(x_n, y_n)\to(x, y)$，$(y_n, x_n)\to(y, x)$。

只須証明 $(x_n, y_n)\to(x, y)$。第二結論可借两元次序的变換而得出。首先

$$|(x_n, y_n)-(x, y)|\leqslant|(x_n, y_n)-(x_n, y)|+$$
$$+|(x_n, y)-(x, y)|=|(x_n, y_n-y)|+|(x_n, y)-(x, y)|。$$

留意(240)及[93]中的不等式(6)，可得

$$|(x_n, y_n)-(x, y)|\leqslant l\|y_n-y\|+|(x_n, y)-(x, y)|。$$

右边第一項 $\to 0$，因为 $y_n\Rightarrow y$，而第二項 $\to 0$，因为 $x_n\to x$。所以 $(x_n, y_n)\to(x, y)$，于是定理得証。

如果有两个序列 x_n 及 y_n，一个弱收斂，而另一个强收斂，其極限各是 x 及 y，而 A 是有界綫性运算子，那末

$$\lim_{n\to\infty}(Ax_n, y_n)=(Ax, y)。\qquad(247)$$

这結論直接由定理 55 及下面的事实得出，即如果 $x_n\to x$，那末

$Ax_n \to Ax$，而如果 $x_n \Rightarrow x$，那末 $Ax_n \Rightarrow Ax$。現在关于全連續运算子下两个新定义。

定义 1. 我們說，綫性运算子 A 是全連續的，是指公式(247)对于任意弱收斂于 x 及 y 的序列 x_n 与 y_n 都成立。

定义 2. 我們說綫性运算子 A 是全連續的，是指由 $x_n \to x$ 可得 $Ax_n \Rightarrow Ax$。

現在証明这两定义是同效的。設 A 对于弱收斂的序列 x_n 及 y_n 滿足条件(247)。可以写成

$$\|Ax_n - Ax\|^2 = (Ax_n, Ax_n - Ax) - (Ax, Ax_n - Ax)。$$

如果 $x_n \to x$，那末 $Ax_n - Ax \to 0$，而右边的两項依(247)收斂于零，就是說 $\|Ax_n - Ax\| \to 0$，即 $Ax_n \Rightarrow Ax$。如此，由第一定义可得第二定义。現在設由 $x_n \to x$ 可得 $Ax_n \Rightarrow Ax$。这时公式(247)直接由定理 55 得出。旣然已知上面两定义同效，为了証明它們与[125]中的基本定义同効，只須証明基本定义与定义 2 同效。設 A 滿足定义 2，而 x_n 是有界的元序列。依定理 54，可以选一部分序列 x_{n_k}，使 $x_{n_k} \to x$，所以依定义 2，$Ax_{n_k} \Rightarrow Ax$，就是說集合 Ax_n 是列緊的，因此由定义 2 可得基本定义。反之，設 A 滿足基本定义，并設 $x_n \to x$。应当証明 $Ax_n \Rightarrow Ax$。我們使用归謬証法。設 Ax_n 不$\Rightarrow Ax$，就是說存在一部分序列标号，使 $\|Ax_{n_k} - Ax\| \geqslant a > 0$。依基本定义，集合 Ax_{n_k} 是列紧的，并可以設 Ax_{n_k} 强收斂于某一元 x'，而由于 $\|Ax_{n_k} - Ax\| \geqslant a > 0$，$x'$ 应与 Ax 不同。但 $x_{n_k} \to x$，所以 $Ax_{n_k} \to Ax$，而旣然 $Ax_{n_k} \Rightarrow x' \neq Ax$，所以 $Ax_{n_k} \to x' \neq Ax$。于是得出矛盾。

如此証明了关于全連續运算子的新定义与基本定义同效。在下面将解釋在 l_2 及 L_2 中弱收斂的概念。

注 如果元集合 x_n 滿足条件(240)，那末为了驗明条件(239)，在可分空間的条件下，只須証明对于某一閉的規格化正交組 z_k，

$$\lim_{n \to \infty} (x_n, z_k) = (x, z_k) \quad (k = 1, 2, \cdots)。 \tag{248}$$

这是因为任意元 y 可以依 z_k 分解:

$$y=\sum_{k=1}^{\infty} b_k z_k,$$

所以

$$\left|\left(x, \sum_{k=N}^{\infty} b_k z_k\right)\right|^2 \leqslant l^2 \sum_{k=N}^{\infty} |b_k|^2。$$

还要注意由全連續运算子定义得出的一个推論。如果当 $x_n \to x$ 及 $y_n \to y$ 时(247)成立,那末 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, A^* y_n)=(x, A^* y)$,就是說如果 A 是全連續运算子,那末 A^* 也是全連續运算子。

128. 运算子的絕对范数 現在介紹一个与有穷維空間中矩陣的迹的概念相联系的概念。設 A 是綫性运算子,而 x_k 及 y_k $(k=1, 2, \cdots)$ 是两个閉規格化正交組。作下面的非負項和:

$$\sum_{p,q=1}^{\infty}(Ax_p, y_q)(y_q, Ax_p)=\sum_{p,q=1}^{\infty}|(Ax_p, y_q)|^2。 \qquad (249)$$

用 $N(A; x_p, y_q)$ 表示这和的平方根的算术值。这值或者是有穷的,或者是 $(+\infty)$。現在証明这和与閉組 x_p 及 y_q 的选擇无关。留意 (Ax_p, y_q) 是元 Ax_p 依組 y_q 展开的傅立叶系数,由于閉性方程可以把(249)改写成

$$N^2(A; x_p, y_q)=\sum_{p=1}^{\infty}\|Ax_p\|^2。 \qquad (250)$$

另一方面,注意 $(Ax_p, y_q)=(x_p, A^* y_q)$,可得

$$N^2(A; x_p, y_q)=N^2(A^*; y_q, x_p)=\sum_{q=1}^{\infty}\|A^* y_q\|^2。 \qquad (251)$$

由方程(250)可知 $N^2(A; x_p, y_q)$ 与組 y_q 的选擇无关,而由(251)可知这量与組 x_p 的选擇无关,如此 $N^2(A; x_p, y_q)$ 自然可以簡写成 $N^2(A)$。正数 $N(A)$ 叫做运算子 A 的絕对范数。这范数可以等于$(+\infty)$。留意(250)及(251)及 $N(A)$ 与組 x_p 及 y_q 的无关性,可得

$$N(A)=N(A^*)。 \qquad (252)$$

又由公式

$$N^2(A+B)=\sum_{p=1}^{\infty}\|Ax_p+Bx_p\|^2$$

及[60]中的不等式(107)可得

$$N(A+B)\leqslant N(A)+N(B)。 \qquad (253)$$

設 U 是么范运算子。这时 $U^{-1}x_p$ 是一閉規格化正交組 [121]，而 $\|UAz\| = \|Az\|$。由此依(250)可知

$$N(UAU^{-1}) = N(A), \tag{254}$$

就是說么范相抵的运算子具有同样的絕对范数。設 $N(A)$ 有穷，并設 x 是某一規格化元。我們可以取它做規格化正交組的第一元，这时由公式(250)可知 $N^2(A) \geqslant \|Ax\|^2$，就是說

$$\text{当 } \|x\| = 1 \text{ 时 } \|Ax\| \leqslant N(A),$$

由此可知运算子的平常范数$\leqslant$其絕对范数。

定理 56. 如果运算子 A 的絕对范数是有穷的，那末 A 是全連續运算子，而如果此外 A 又是自共軛运算子，那末下面的公式成立：

$$N^2(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2, \tag{255}$$

其中 μ_k 是 A 的固有值(重固有值出現的次数等于其重复度)，而右边的級数收斂。

設 $z_n \to z$。应当証明 $Az_n \Rightarrow Az$。作差 $z_n - z$，并以 $z_n - z$ 代替 z_n，应当証明：如果 $z_n \to 0$，那末 $\|Az_n\| \to 0$。依組 x_k 分解 z_n：

$$z_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(n)} x_k, \tag{256}$$

因为 $z_n \to 0$，所以当 $n \to \infty$ 时

$$a_k^{(n)} = (z_n, x_k) \to 0。 \tag{257}$$

使用运算子 A 于(256)的两边，并把右边的部分分成两个：

$$Az_n = \sum_{k=1}^{N} a_k^{(n)} Ax_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k^{(n)} Ax_k。 \tag{258}$$

关于第二个和：

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k^{(n)} Ax_k \right\| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k^{(n)}| \|Ax_k\| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k^{(n)}|^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \|Ax_k\|^2}。 \tag{259}$$

此外，

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k^{(n)}|^2 \leqslant \|z_n\|^2,$$

而因为 $z_n \to 0$，上面的和对于任意 N 及 n 不能超过某一正数 l^2。又由級数(250)的收斂(依絕对范数有穷的条件)可知

$$\text{当 } N\to\infty \text{ 时} \quad \sum_{k=N+1}^{\infty}\|Ax_k\|^2\to 0\text{。}$$

因此，依(259)，对于任意预定的正数 ε 可以固定一数 N_0，使

$$\left\|\sum_{k=N_0+1}^{\infty} a_k^{(n)}Ax_k\right\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\text{。}$$

由(258)可知

$$\|Az_n\|\leqslant\left\|\sum_{k=1}^{N_0} a_k^{(n)}Ax_k\right\|+\frac{\varepsilon}{2},$$

而依(257)，对于一切足够大的 n，右边的第一项 $\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$，就是說 $\|Az_n\|\leqslant\varepsilon$，由此，因为 ε 是任意的，可知 $\|Az_n\|\to 0$。如此証明了 A 是全連續运算子。設 A 是全連續自共軛运算子，而以它的固有元作組 x_k。这时 $Ax_k=\mu_k x_k$，而公式(255)可以直接由(250)得出。一般說来，如果 A 是具有純点譜的自共軛运算子，那末公式(255)成立，而級数(255)的收斂与这运算子的絕对范数的有界性是同效的。

現在介紹一个与有穷維空間情形中矩陣的迹相似的新概念。設 A 是自共軛正运算子。可以作运算子 $B=\sqrt{A}$ [110]，則 $A=B^2$。作运算子 B 的絕对范数：

$$N^2(B)=\sum_{p=1}^{\infty}\|Bx_p\|^2=\sum_{p=1}^{\infty}(Bx_p, Bx_p)=\sum_{p=1}^{\infty}(B^2x_p, x_p)=\sum_{p=1}^{\infty}(Ax_p, x_p)\text{。}$$

由此可以看出，对于自共軛正运算子，和

$$\sum_{p=1}^{\infty}(Ax_p, x_p)$$

与組 x_p 的选擇无关。这和叫做运算子 A 的迹，并用 $Sp(A)$ 表示。由上面討論可知

$$Sp(A)=N^2(\sqrt{A})=\sum_{p=1}^{\infty}(Ax_p, x_p)\text{。} \tag{260$_1$}$$

如果 A 有純点譜，可用 A 的固有元組成閉規格化正交組 x_p，于是由 $Ax_p=\mu_p x_p$ 可得

$$Sp(A)=\sum_{p=1}^{\infty}\mu_p\text{。} \tag{260$_2$}$$

注意如果 A 是任意运算子，那末 A^*A 是自共軛正运算子，面

$$Sp(A^*A)=\sum_{p=1}^{\infty}(A^*Ax_p, x_p)=\sum_{p=1}^{\infty}\|Ax_p\|^2=N^2(A)\text{。} \tag{261}$$

現在証明一个下面有用的輔助定理。

輔助定理　有一序列运算子 $A_k(k=1, 2, 3, \cdots)$，其范数（或絕对范数）不超过正数 δ_k，而 δ_k 組成一收斂級数。这时級数

$$A=A_1+A_2+A_3+\cdots \tag{262}$$

收斂，就是說运算子序列

$$B_k=A_1+A_2+\cdots+A_k \tag{263}$$

有極限，而 A 的范数（或絕对范数）$\leqslant$ 下面級数的和：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k。 \tag{264}$$

将就平常范数来証明輔助定理。有穷和 $A_{p+1}+A_{p+2}+\cdots+A_{p+m}$ 的范数不超过 $\delta_{p+1}+\delta_{p+2}+\cdots+\delta_{p+m}$，而对于大的 p 及任意的 m，这和可以成为任意小。由此可知序列(263)收斂，就是說級数(262)收斂。如果 A 的范数大于級数(264)的和，那末对于足够大的 k 值，B_k 的范数也会大于級数(264)的和，而这不可能，因为 B_k 的范数不大于 $\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_k$，而輔助定理証明了。对于絕对范数的情形証明也完全一样。

129. 譜的凝点　提醒一下，所謂自共軛运算子 A 的譜的凝点乃是指点譜的極限点，或是无穷秩的固有值，或是連續譜的点。本节的目的乃是証明下面的定理：

定理 57.　如果对于自共軛运算子 A 添加上全連續的自共軛运算子 C，那末这时譜凝点的集合并不变更。

首先証明两个輔助定理，这可以补充[103]的定理 15。

輔助定理 1.　如果 $\lambda=\mu$ 是自共軛运算子 A 的譜的凝点，那末存在一序列規格化的元 x_n，这序列弱收斂于零，并且

$$\|Ax_n-\mu x_n\|\to 0。 \tag{265}$$

如果 μ 是点譜的極限点，或无穷秩的固有值，那末必存在一无穷序列的相互正交并規格化的元 x_n，其相应的固有值 λ_n 趋向于 μ。如果 z 是任意元，那末其傅立叶系数 $c_n=(z, x_n)$ 趋向于零，所以 $x_n\to 0$，而在所考察的情形下，我們的結論可由下面公式得出：

$$\begin{aligned}\|Ax_n-\mu x_n\|&=\|(A-\lambda_n E)x_n+(\lambda_n-\mu)x_n\|=\\&=|\lambda_n-\mu|\cdot\|x_n\|=|\lambda_n-\mu|。\end{aligned}$$

現在設 μ 是連續譜的点，而 $\mathscr{E}_\lambda$ 是譜函数的連續部分。对于任意小的正数 δ，

差 $\mathscr{E}'_{\mu+\delta}-\mathscr{E}'_{\mu-\delta}$ 是在某一子空間 L_δ 中的投影运算子。取正数序列 δ_n，使 $\delta_n\to 0$，并取 L_{δ_n} 中的規格化元 x_n 所組成的序列。証明这时輔助定理的結論也成立。依 δ_n 的定义，$(\mathscr{E}'_{\mu+\delta_n}-\mathscr{E}'_{\mu-\delta_n})x_n=x_n$，而对于任意元 z，

$$(z,\ x_n)=(z,\ (\mathscr{E}'_{\mu+\delta_n}-\mathscr{E}'_{\mu-\delta_n})x_n)=((\mathscr{E}'_{\mu+\delta_n}-\mathscr{E}'_{\mu-\delta_n})z,\ x_n),$$

而
$$|(z,\ x_n)|\leqslant\|(\mathscr{E}'_{\mu+\delta_n}-\mathscr{E}'_{\mu-\delta_n})z\|。$$

但 $\mathscr{E}'_{\mu+\delta_n}-\mathscr{E}'_{\mu-\delta_n}\to 0$，所以 $x_n\to 0$ 弱收斂。为了証明(265)，应用下面显然的公式：

$$\begin{aligned}\|Ax_n-\mu x_n\|^2&=\int_{m-\varepsilon}^{M}(\lambda-\mu)^2d(\mathscr{E}'_\lambda x_n,\ x_n)=\\&=\int_{m-\varepsilon}^{M}(\lambda-\mu)^2d(\mathscr{E}'_\lambda(\mathscr{E}'_{\mu+\delta_n}-\mathscr{E}'_{\mu-\delta_n})x_n,\ x_n)=\\&=\int_{\mu-\delta_n}^{\mu+\delta_n}(\lambda-\mu)^2d\|(\mathscr{E}'_\lambda-\mathscr{E}'_{\mu-\delta_n})x_n\|^2\leqslant\\&\leqslant\delta_n^2\|(\mathscr{E}'_{\mu+\delta_n}-\mathscr{E}'_{\mu-\delta_n})x_n\|^2=\delta_n^2\to 0。\end{aligned}$$

輔助定理 2. 如果 $\lambda=\mu$ 不是譜的凝点，那末对于任意弱收斂于零的規格化元序列 x_n，必存在一正数 a，使对于一切足够大的 n，

$$\|Ax_n-\mu x_n\|\geqslant a>0。\tag{266}$$

依輔助定理的条件，存在一正数 δ，使在区間 $\mu-d\leqslant\lambda\leqslant\mu+d$ 中譜函数 $\mathscr{E}_\lambda$ 或是定值的，或者它的改变乃是在 $\lambda=\mu$ 点处的跳跃，而与这不連續跳跃相应的固有元子空間 L_μ 的維数有穷。那末

$$\begin{aligned}\|Ax_n-\mu x_n\|^2&=\int_{m-\varepsilon}^{M}(\lambda-\mu)^2d\|\mathscr{E}_\lambda x_n\|^2\geqslant\\&\geqslant\int_{m-\varepsilon}^{\mu-d}(\lambda-\mu)^2d\|\mathscr{E}_\lambda x_n\|^2+\int_{\mu+d}^{M}(\lambda-\mu)^2d\|\mathscr{E}_\lambda x_n\|^2\geqslant\\&\geqslant d^2[\|\mathscr{E}_{\mu-d}x_n\|^2+d^2(\|x_n\|^2-\|\mathscr{E}_{\mu+d}x_n\|^2)]=\\&=d^2-d^2[\|\mathscr{E}_{\mu+d}x_n\|^2-\|\mathscr{E}_{\mu-d}x_n\|^2],\end{aligned}$$

即

$$\|Ax_n-\mu x_n\|^2\geqslant d^2-d^2((\mathscr{E}_{\mu+d}-\mathscr{E}_{\mu-d})x_n,\ x_n)。\tag{267}$$

如果 $\mathscr{E}_{\mu+d}-\mathscr{E}_{\mu-d}=0$，那末令 $a=d$ 可得(266)。現在設 $\mathscr{E}_\lambda$ 在 $\lambda=\mu$ 处有跳跃，設 $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_m$ 是 L_μ 中的完全正交組。如此

$$(\mathscr{E}_{\mu+d}-\mathscr{E}_{\mu-d})x_n=\sum_{s=1}^{m}(x_n,\ z_s)z_s,$$

而既然 $x_n\to 0$，$(\mathscr{E}_{\mu+d}-\mathscr{E}_{\mu-d})x_n\rightrightarrows 0$，而由公式(267)可知(266)对于足够大的

n 满足，只要(比方說是)令 $a=\frac{1}{2}d$ 就可以了。由剛証明的輔助定理直接可知为使 $\lambda=\mu$ 是譜的凝点，必須且只須存在一序列規格化的元 x_n，使 $x_n\rightharpoonup 0$，并且(265)成立。

現在不难証明定理 57。对于运算子 A 加添全連續自共軛运算子 C，令 $A_1=A+C$。这时 $A=A_1+(-C)$，其中 $(-C)$ 也是全連續自共軛运算子。設 $\lambda=\mu$ 是 A 的譜的凝点，而 x_n 是滿足条件(265)的序列。这时既然 $x_n\rightharpoonup 0$，$Cx_n\Rightarrow$ $\Rightarrow 0$，由不等式 $\|A_1x_n-\mu x_n\|\leqslant\|Ax_n-\mu x_n\|+\|Cx_n\|$ 可知 $\|A_1x_n-\mu x_n\|\to 0$，就是說 $\lambda=\mu$ 也是 A_1 的譜的凝点。完全同样。既然 $A=A_1+(-C)$，可知反之，凡 A_1 的譜的凝点也是 A 的譜的凝点；于是定理証明了。

130. 譜改換成純点譜 本节目的是証明下面定理：

定理 58. 对于任意已給的自共軛运算子 A 可以加上一个自共軛全連續运算子 C，使 C 的絕对范数不超过任意預定的正数 a，而 $A+C$ 有純点譜。

首先証明一輔助定理。

輔助定理 对于任意預定的正数 ε 及任意預定的元 x_0，可以作一有穷維的子空間 L 及一全連續的自共軛运算子 C，使

$$x_0\in L;\ N(C)\leqslant\varepsilon \text{ 而 } H-L \text{ 簡約 } A-C. \tag{268}$$

令 $h=\frac{M-(m-\varepsilon_0)}{n}$，作元

$$y_k=[\mathscr{E}_{a+kh}-\mathscr{E}_{a+(k-1)h}]x_0 \quad (a=m-\varepsilon_0;\ k=1,2,\cdots,n), \tag{269}$$

其中为正整数 n 将在下面固定起来。作規格化元 $z_k=y_k:c_k$，其中 $c_k=\|y_k\|$，可以写成

$$x_0=\sum_{k=1}^{n}c_kz_k, \tag{270}$$

其中 z_k 当 $y_k=0$ 时不确定，如此的項将从和中舍去。諸元 z_k 属于与投影运算子 $\mathscr{E}_{a+kh}-\mathscr{E}_{a+(k-1)h}$ 相应的子空間，并組成一規格化正交組，依定义(269)及[108]中的公式(104)：

$$\|Az_k-(a+kh)z_k\|^2=\int_{m-\varepsilon_0}^{M}[\lambda-(a+kh)]^2d(\mathscr{E}_\lambda z_k,z_k)=$$

$$=\int_{a+(k-1)h}^{a+kh}[\lambda-(a+kh)]^2d\|\mathscr{E}_\lambda z_k\|^2\leqslant$$

$$\leqslant h^2\int_{a+(k-1)h}^{a+kh}d\|\mathscr{E}_\lambda z_k\|^2=h^2\|z_k\|^2=h^2,$$

就是說

$$\|Az_k-(a+kh)z_k\|\leqslant h,$$

我們可以写成

$$Az_k=(a+kh)z_k+u_k,\ \text{其中}\ \|u_k\|\leqslant h\ 。\tag{271}$$

設 L 是由諸矢量 z_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ 組成的子空間，而 P 是 L 中的投影。运算子 $E-P$ 是 $H-L$ 中的投影，而依(271)可以写成

$$(E-P)Az_k=(E-P)u_k,\ \text{而}\ \|(E-P)Az_k\|\leqslant h\ 。\tag{272}$$

补充 $z_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 成为完全的规格化正交組。这时 $Pz_k=z_k$ 当 $k\leqslant n$ 时成立，而当 $k>n$ 时 $Pz_k=0$，于是对于运算子 $(E-P)AP$，依 (272)，

$$\text{当}\ k\leqslant n\ \text{时}\quad \|(E-P)APz_k\|\leqslant h^2,$$

$$\text{当}\ k>n\ \text{时}\quad \|(E-P)APz_k\|=0,$$

所以

$$N[(E-P)AP]\leqslant\sqrt{n}\,h=\frac{M-(m-\varepsilon_0)}{\sqrt{n}}。\tag{273}$$

作自共軛运算子

$$C=[(E-P)AP]+[(E-P)AP]^*=(E-P)AP+PA(E-P)。\tag{274}$$

依 (252)，(253)，(273)，可知 $N(C)\leqslant\dfrac{2[M-(m-\varepsilon_0)]}{\sqrt{n}}$。依(270)，$x_0\in L$，并可以选 n 足够大，使 (268) 中的第二条件滿足。剩下的只是証明 $H-L$ 簡約 $A-C$ 了。由公式(274)得

$$A-C=(E-P)A(E-P)+PAP,$$

由此既然 $P^2=P$, $P(E-P)=(E-P)P=0$，可知 $P(A-C)=PAP$，及 $(A-C)P=PAP$，就是說 P 与 $A-C$ 交换，所以 L 簡約 $A-C$，因此 $H-L$ 簡約 $A-C$[116]。

回来証明定理 58。取在 H 中到处稠密的一个元序列 x_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$，而 H 設是可分的。对于运算子 A，及 $x_0=x_1$，$\varepsilon=\dfrac{a}{2}$，使用輔助定理的作法。于是得出一有穷維的子空間 M_1 及一运算子 C_1，使 $N(C_1)\leqslant\dfrac{a}{2}$，而 $A-C_1$ 可以看做是 $H-M_1$ 中的运算子。設 x_2' 是 x_2 在 $H-M_1$ 中的投影。如果 $x_2'\neq 0$，那末在希勒柏特空間 $H-M_1$ 中对于运算子 $A-C_1$ 及 $x_0=x_2'$，$\varepsilon=\dfrac{a}{4}$ 使用輔助定理的作法。可得一子空間 M_2 及运算子 C_2，使 $N(C_2)\leqslant\dfrac{a}{4}$，$A-C_1-C_2$ 可以看做是 $H-(M_1\dotplus M_2)$ 中的运算子。在空間 $H-(M_1\dotplus M_2)$ 中对于运算子 $A-C_1-C_2$，$\varepsilon=\dfrac{a_0}{8}$ 及取 x_0 为 x_3 在 $H-(M_1\dotplus M_2)$ 中的投影，

使用輔助定理的作法。可得 M_3 及 C_3，如此繼續下去。子空間 M_2 位于 $H-M_1$ 中，就是說 $M_2 \perp M_1$。同样 M_3 位于 $H-(M_1 \dot{+} M_2)$ 中，所以 $M_3 \perp M_1$，$M_3 \perp M_2$。如此諸有穷維空間 M_k 是彼此正交的。依作法，$x_1 \in M_1$，所以它在 $H-M_1$ 中的投影是零元，又因 $x_2 = x_2' + z_2$，其中 $x_2' \in M_2$，$z_2 \perp H-M_1$。由此可見 x_2 在 $H-(M_1 \dot{+} M_2)$ 中的投影是零元。同样 x_3 在 $H-(M_1 \dot{+} M_2 \dot{+} M_3)$ 中的投影等于零元，等等。如果作諸子空間 M_k 之正交和：

$$M_0 = M_1 \dot{+} M_2 \dot{+} M_3 \dot{+} \cdots,$$

那末任意 x_n 在 $H-M_0$ 中的投影等于零元。現在証明 M_0 与 H 重合。設 x 是任意元。对于任意預定的正数 η，存在一个 x_n，使 $\|x-x_n\| \leqslant \eta$，就是說 $x = x_n + v_n$，而 $\|v_n\| \leqslant \eta$。x 在 $H-M_0$ 中的投影等于 v_n 在 $H-M_0$ 中的投影，因此 x 在 $H-M_0$ 中的投影的范数不大于 η。旣然 η 是任意的，由此可知任意元 x 在 $H-M_0$ 中的投影等于零元，就是說 $M_0 = H$。如此可以把 H 表示成諸有穷維子空間 M_k 的正交和的形式：

$$H = M_1 \dot{+} M_2 \dot{+} M_3 \dot{+} \cdots. \tag{275}$$

自共軛全連續运算子 C_2 只定义于 $H-M_1$ 中。可以設当 $x \in M_1$ 时 $C_2 x = 0$，于是把它扩展到整个 H 上去。如此其絕对范数并不增加，而且它仍是在 H 中自共軛全連續的。同样，C_3，C_4，$\cdots$ 也可以扩展到整个 H 上去。留意 $N(C_k) \leqslant \frac{a}{2^k}$，并注意[128]节中的輔助定理，可以作自共軛全連續运算子

$$C' = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots,$$

而 $N(C') \leqslant a$。子空間 M_1 簡約 $A - C_1$。当 $k \geqslant 2$ 时，运算子 C_k 旣然扩展到整个 H 上去，它消灭 M_1 中的元，所以 M_1 簡約 $A - C'$。子空間 M_2 簡約运算子 $A - C_1 - C_2$，而这最初是定义于 $H - M_1$ 上的。运算子 C_k 当 $k \geqslant 3$ 时消灭凡属于 $M_1 + M_2$ 的元，所以 M_2 簡約 $A - C'$。完全同样可以証明凡 M_k 簡約 $A - C'$。但每个 M_k 是有穷維的，因此 $A - C'$ 在 M_k 中是有純点譜的。留意 (275) 可知运算子 $A - C'$ 的固有元規格化正交組是在 H 中閉的。令 $C = -C'$，可得定理 58 的証明。

应用这定理可以証明下面的定理：如果自共軛运算子 A_1 及 A_2 的譜的凝点是相同的，那末必存在一么范运算子 U 及一自共軛全連續运算子 C，使 $A_2 = U A_1 U^{-1} + C$ (J. v. Neumann, Integraloperatoren, 11頁)。

131. 正常运算子 再举出一种特殊的綫性运算子，这就是所謂正常运算子。一綫性运算子 A 叫做正常的，是指它与它的共軛运算子交換，就是說，

$$AA^* = A^* A_{\circ} \tag{276}$$

自共轭及么范运算子都是正常运算子的特例。如果令

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*); \quad A_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*), \tag{277}$$

那末可以把 A 及 A^* 用自共轭运算子 A_1 及 A_2 表示出来：

$$A = A_1 + iA_2; \quad A^* = A_1 - iA_{2\circ} \tag{278}$$

由上面公式直接可知：一运算子 A 是正常的必要且充分条件乃是自共轭运算子 A_1 及 A_2 相交换。如果它們相交换，那末这两运算子的譜函数 $\mathscr{E}_\lambda^{(1)}$ 及 $\mathscr{E}_\mu^{(2)}$ 对于任意 λ 及 μ 相交换。定义一族依从于复变数 $\alpha = \lambda + \mu i$ 的投影运算子：

$$\mathscr{E}_\alpha = \mathscr{E}_\lambda^{(1)} \mathscr{E}_\mu^{(2)} \ (\alpha = \lambda + \mu i)_{\circ} \tag{279}$$

这投影运算子只在复变数 α 平面的某一区間 Δ_0 上变化，而对于运算子 A，有一完全与自共轭运算子的情形相似的公式成立：

$$A = \iint_{\Delta_0} \alpha d d\mathscr{E}_\alpha; \quad (Ax, y) = \iint_{\Delta_0} \alpha d d(\mathscr{E}_\alpha x, y) \tag{280}$$

我們来証明第二个公式做例。設区間 Δ_0 由不等式 $a \leqslant \lambda \leqslant b$ 及 $c \leqslant \mu \leqslant d$ 定义。那末

$$\iint_{\Delta_0} \alpha d d(E_\alpha x, y) = \iint_{\Delta_0} \lambda d_\lambda d_\mu (\mathscr{E}_\lambda^{(1)} \mathscr{E}_\mu^{(2)} x, y) + i \iint_{\Delta_0} \mu d_\lambda d_\mu (\mathscr{E}_\lambda^{(1)} \mathscr{E}_\mu^{(2)} x, y)_{\circ}$$

在上面的第一个积分中，当作出黎曼-斯提勒杰斯和之后，先依 μ 取和，因为积分号下函数与 μ 无关，而这时应当留意：$\mathscr{E}_c^{(2)} = 0$，$\mathscr{E}_d^{(2)} = E$。同样在第二个积分中可以先依 λ 取和，其中 $\mathscr{E}_a^{(1)} = 0$，$\mathscr{E}_b^{(1)} = E$。如此可得

$$\iint_{\Delta_0} \alpha d d(\mathscr{E}_\alpha x, y) = \int_a^b \lambda d(\mathscr{E}_\lambda^{(1)} x, y) + i \int_c^d \mu d(\mathscr{E}_\mu^{(2)} x, y) = (A_1 x, y) + i(A_2 x, y),$$

另一方面，

$$(Ax, y) = (A_1 x, y) + i(A_2 x, y),$$

比較一下，可得(280)的第二公式。正常运算子的进一步的一般理論可以与自共轭运算子理論相似地闡發。

設在正常运算子 A 的情形中，自共轭运算子 A_1 及 A_2 有純点譜。可以取由 A_1 及 A_2 的公共固有元組成的閉規格化正交組 $x_k (k = 1, 2, 3, \cdots)$ [124]，就是說：

$$A_1 x_k = \mu_k^{(1)} x_k; \quad A_2 x_k = \mu_k^{(2)} x_{k\circ}$$

显然

$$Ax_k=(A_1+iA_2)x_k=(\mu_k^{(1)}+\mu_k^{(2)}i)x_k,$$

如此 x_k 是 A 的固有元，与固有值 $\mu_k^{(1)}+\mu_k^{(2)}i$ 相应。

再考察正常运算子 A 是全連續的情形。我們知道，这时运算子 A^* 也是全連續的，而依 (277)，运算子 A_1 及 A_2 也是全連續的。不难把定理 53(乙) 也推广到正常全連續运算子上去。設 μ_k 是 A_1 的不等于零的固有值，而 x_k 是其相应固有元，就是說

$$A_1x_k=\mu_kx_k\text{。}$$

留意 A_2 与 A_1 交换，把两边乘以 A_2，可得

$$A_1(A_2x_k)=\mu_kA_2x_k,$$

就是說 A_2x_k 或是零元，或是与同一固有值 μ_k 相应的固有元。設 μ_k 是 h 秩的固有值，而 $\mu_k=\mu_{k+1}=\cdots=\mu_{k+h-1}$。此时依上面所說的，应当

$$A_2x_j=\sum_{s=k}^{k+h-1}c_{js}x_s\quad(j=k,\ k+1,\ \cdots,\ k+h-1),$$

$$c_{js}=(A_2x_j,\ x_s)=(x_j,\ A_2x_s)=\overline{c_{sj}},$$

就是說 c_{js} 組成有穷埃尔密特矩陣。对于諸 x_s 作么范映像，这是无关宏旨的，于是可以把这矩陣变成对角形，而如仍保持原来的記号，可以写成

$$A_1x_k=\mu_jx_k;\quad A_2x_k=\nu_jx_k\quad(j=k,\ k+1,\ \cdots,\ k+h-1),$$

其中某些个 ν_j 甚至于它們全体都可能等于零。可以对于 A_1 的凡不等于零的固有值作这种映像。經过这映像之后，可能并不得出 A_2 的一切异于零的固有值。如果取这些不能如此得出的 A_2 的异于零的固有元，并照着类似于前面的方式来做映像运算，但对調 A_2 及 A_1 的作用，那末最后得出有穷多或可数无穷多元 $y_k(k=1,\ 2,\ \cdots)$，这些元相互正交，是規格化的，并且适合

$$A_1y_k=\mu_k^{(1)}y_k;\quad A_2y_k=\mu_k^{(2)}y_k,$$

其中对于任意 k，两个实数 $\mu_k^{(1)}$ 及 $\mu_k^{(2)}$ 中至少有一个不等于零，而凡与异于零的固有值相应的 A_1 的固有元，可以由有穷多个 y_k 的一次式表出，对 A_2 說也一样。此外，显然

$$Ay_k=(\mu_k^{(1)}+\mu_k^{(2)}i)y_k;\quad A^*y_k=(\mu_k^{(1)}-\mu_k^{(2)}i)y_k\text{。}$$

設

$$x=Ay=A_1y+iA_2y\text{。}$$

依定理 53 (乙)，

$$A_1y=\sum_k a_ky_k,\quad A_2y=\sum_k b_ky_k,$$

如此凡可以表成 Ay 形式的元 x 可以依諸元 y_k 分解：

$$x=Ay=\sum_k(a_k+b_ki)y_k\text{。}$$

注意，如果，比方說是 $\mu_k^{(1)}=0$，那末在 A_1y 的分解式中沒有含 y_k 的項。証明[126]中的定理 53 的类似命題时并不应用可分性公理，也不应用完备性公理，后者在[126]的推理中也如此。在上面曾看到[123]，如果运算子 A 是自共軛运算子 B 的函数，那末 A^* 也是 B 的函数，因此 A 与 A^* 交換，就是說 A 是正常运算子。如此，自共軛运算子的任意函数乃是正常运算子。逆命題也成立：凡正常运算子必是某一自共軛运算子的函数。事实上，設有正常运算子 $A=A_1+iA_2$。自共軛运算子 A_1 及 A_2 交換，因此，依[124]所說，它們乃是同一自共軛运算子 B 的函数：$A_1=F_1(B)$，$A_2=F_2(B)$。作函数 $F(\lambda)==F_1(\lambda)+iF_2(\lambda)$，可得 $A=F(B)$，这正是所要証的。

132. 輔助命題 本节及下节的任务乃是証明[109]中的基本定理 29 及下面的事实，即如果某运算子与自共軛运算子 A 交換，那末它也与后者的任意譜函数 $\mathscr{E}_\lambda$（λ 任意）交換。在討論这証明时将应用在[109]以前的結果。首先应当討論几个輔助定理。

輔助定理 1. 如果 A 及 B 是交換的自共軛运算子，并满足关系

$$A^2=B^2, \tag{281}$$

而 P 是在子空間 L 中的投影运算子，L 是满足方程

$$(A+B)x=0, \quad \text{就是} \quad Ax=-Bx \tag{282}$$

的元所組成者，那末下面諸性質成立：

1. 如果某运算子 D 与 $(A+B)$ 交換，那末它与 P 也交換。

2. 如果 $Ax=0$，那末 $x\in L$，就是說 $Px=x$。

3. 运算子 A 可以用下面公式表出：

$$A=(E-2P)B。 \tag{283}$$

1. 依条件，

$$D(A+B)=(A+B)D。 \tag{284}$$

如果 $x\in L$，依 (282)，$D(A+B)x=0$，因此 $(A+B)Dx=0$，就是說 $Dx\in L$。如果 z 是 H 中的任意元，那末 $Pz\in L$，而依剛才所証的，$DPz\in L$，因此对于 H 中任意元 z 可以写成：$PDPz=DPz$，就是說

$$PDP=DP。 \tag{285}$$

取 (284) 中諸运算子的共軛运算子，并留意 A 及 B 是自共軛的，可得[98]：

$$(A+B)D^*=D^*(A+B),$$

就是說 D^* 与 $A+B$ 交換，而对于它也可以写出公式 (285)，就是說

$$PD^*P=D^*P。$$

取两边的共軛运算子，并留意 P 是自共軛运算子，可得 $PDP=PD$。把这等式与(285)比較，可得 $DP=PD$，就是說 D 确与 P 交换，这正是我們所要証的。特别是运算子 A 及 B 与 $(A+B)$ 交换，因此 A 及 B 与 P 交换。

2．由等式

$$\|Az\|^2=(Az,\ Az)=(A^2z,\ z);\quad \|Bz\|^2=(Bz,\ Bz)=(B^2z,\ z),$$

及条件(281)，可知 $\|Az\|=\|Bz\|$ 对于任意元 z 成立。如果 $Ax=0$，那末 Bx 也 $=0$，所以 x 满足方程(282)，就是說 $x\in L$，而 $Px=x$，这正是所要証的。

3．既然 A 与 B 交换，由条件(281)可知 $(A+B)(A-B)=0$，就是說如果 z 是 H 的任意元，那末 $(A-B)z\in L$，所以 $P(A-B)z=(A-B)z$，就是說

$$P(A-B)=A-B。$$

此外，对于任意元 z，元 $Pz\in L$，所以 $(A+B)Pz=0$，就是

$$(A+B)P=0。$$

由这等式减去上式，并留意 A 及 B 与 P 交换，可得 $2PB=-A+B$，由此得(283)，輔助定理完全証明了。

輔助定理 2． 如果自共軛运算子 $C\geqslant 0$，而自共軛运算子 F 与 C 交换，那末 $F^2C=CF^2\geqslant 0$。

留意輔助定理的条件，令 $Fx=y$，可知

$$(CF^2x,\ x)=(FCFx,\ x)=(CFx,\ Fx)=(Cy,\ y)\geqslant 0,$$

于是本輔助定理証明了。注意本輔助定理的一个特例。如果投影运算子 P 与 C 交换，那末依条件 $P^2=P$，可知 $PC\geqslant 0$。

如果 $P(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n$ 是一多项式，而 A 是一运算子，那末可以作与多項式 $P(t)$ 相应的运算子 $P(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_nA^n$。如果 A 是自共軛运算子，而系数 a_k 都是实数，那末 $P(A)$ 也是自共軛运算子。为了說明运算子多項式的性質，必須再論两个輔助定理。

輔助定理 3． 如果多項式 $P(t)$ 在区間 $[0,\ 1]$ 中是正的，那末对于一切足够大的 p 值，可以把它表示成下面形式：

$$P(t)=\sum_{s=0}^{p}c_st^s(1-t)^{p-s},\tag{286}$$

其中一切系数 c_s 是正的。

对于一次多項式，这結果由下面公式得出：

$$P(t)=c_0(1-t)+c_1t,\quad 其中\quad c_0=P(0),\quad c_1=P(1)。$$

考察二次正多項式,并設它不能分解成一次实因子:

$$P(t)=\alpha+2\beta t+\gamma t^2 \quad (\alpha>0,\ \gamma>0,\ \alpha\gamma-\beta^2>0)。$$

注意公式

$$[(1-t)+t]^k=\sum_{s=0}^{k}C_k^s t^s(1-t)^{k-s}=1,$$

可以把上面多項式写成下面形式:

$$P(t)=\alpha\sum_{s=0}^{p}C_p^s t^s(1-t)^{p-s}+2\beta t\sum_{s=1}^{p}C_{p-1}^{s-1}t^{s-1}(1-t)^{p-s}+$$

$$+\gamma t^2\sum_{s=2}^{p}C_{p-2}^{s-2}t^{s-2}(1-t)^{p-s},$$

把同类項合并,得

$$P(t)=\sum_{s=0}^{p}\frac{(p-2)!}{s!(p-s)!}t^s(1-t)^{p-s}[p(p-1)\alpha+2s(p-1)\beta+s(s-1)\gamma]。\quad (287)$$

方括号中的式子对于一切实数 s 及一切足够大的 p 值是正的。事实上,这个 s 的三項式的判别式

$$p(p-1)\alpha\gamma-\frac{1}{4}(2p\beta-2\beta-\gamma)^2=$$

$$=p^2(\alpha\gamma-\beta^2)+p(2\beta^2+\beta\gamma-\alpha\gamma)-\frac{1}{4}(2\beta+\gamma)^2,$$

对于一切足够大的 p 是正的,因为 $\alpha\gamma-\beta^2>0$。如此由公式 (287) 可得公式 (286),其中的 c_s 对于足够大的一切 p 值都是正的。现在取区間 $[0,1]$ 中的任意正多項式。它可以表示成正一次多項式及正二次多項式的积,而这些二次多項式只有虛根。对于每个因子,(286) 式成立。因此对于它們的积这式 (286) 也成立,其中次数 p 等于其个別因子的次数之和。

注 借助变数代換 $t_1=\frac{t-a}{b-a}$,可以把任意有穷区間 $a\leqslant t\leqslant b$ 变成区間 $0\leqslant t_1\leqslant 1$,而对于在区間 $[a,b]$ 中正的多項式可得与 (286) 相类似的公式:

$$P(t)=\sum_{s=0}^{p}c_s(t-a)^s(b-t)^{p-s}。\quad (288)$$

輔助定理 4. 如果 m 及 M 是自共軛运算子 A 的界,就是說它們是二次泛函 (Ax,x) 在 $\|x\|=1$ 条件下的下确界与上确界,而 $P(t)$ 是在区間 $[m,M]$ 內非負多項式,那末 $P(A)$ 是正运算子,就是說

$$(P(A)x,x)\geqslant 0。\quad (289)$$

只須証明在区間 $[m,M]$ 中 $P(t)>0$ 的情形輔助定理成立。事实上,設在这情形中輔助定理已經証明,而設在区間 $[m,M]$ 中 $Q(t)\geqslant 0$。令 $P(t)=Q(t)+\varepsilon$,其中 $\varepsilon>0$,那末在区間 $[m,M]$ 中 $P(t)>0$,所以

$$((Q(A)+\varepsilon)x,\ x)=(Q(A)x,\ x)+\varepsilon(x,\ x)\geqslant 0\text{。}$$

令 $\varepsilon\to 0$，可得 $Q(A)$ 也滿足不等式(289)。現在对于正 $P(t)$ 証明本輔助定理。依(288)，当 $a=m$，$b=M$ 时，只須証明运算子

$$(A-mE)^{s}\ (ME-A)^{p-s} \tag{290}$$

是正的，而其中的数 p 可以設是奇数（正运算子之和仍是正的）。例如設 $s=2j$ 是偶数，而把运算子(290)表示成下面形式：

$$A_2^2A_1,$$

其中

$$A_1=(ME-A);\quad A_2=(A-mE)^{j}(ME-A)^{\frac{p-2j-1}{2}},$$

其中 A_2 与 A_1 交換，而 A_1 是正运算子，因为当 $\|x\|=1$ 时 $(A_1x,\ x)=M-(Ax,\ x)\geqslant 0$。依輔助定理2可知运算子(290)是正的。对于奇数 s 应当取 $A_1=(A-mE)$。

系1. 如果在区間$[m,\ M]$中多項式 $P_1(t)$ 及 $P_2(t)$ 滿足不等式 $P_2(t)\geqslant P_1(t)$，就是說 $P_2(t)-P_1(t)\geqslant 0$，那末 $P_2(A)\geqslant P_1(A)$。特別是如果 $|P(t)|\leqslant\varepsilon$，就是說 $-\varepsilon\leqslant P(t)\leqslant\varepsilon$，那末 $-\varepsilon E\leqslant P(A)\leqslant\varepsilon E$，就是說 $-\varepsilon\leqslant(P(A)x,\ x)\leqslant\varepsilon$ 对于 $\|x\|=1$ 成立，所以 $P(A)$ 的范数不大于 ε[100]。

系2. 由上系可知如果多項式序列 $P_n(t)$ 在区間 $[m,\ M]$ 中一致收斂于多項式 $P(t)$，那末 $P_n(A)\to P(A)$，而差 $P(A)-P_n(A)$ 的范数趋向于零。

133. 运算子的冪級数　回忆一下在[128]中証明的輔助定理，其結果乃是說：如果运算子序列 $A_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 的范数不超过正数 δ_n，而 δ_n 組成一收斂級数，那末級数

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}A_n$$

收斂，而运算子 A 的范数不超过諸数 δ_n 之和。特別是如果有冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n,$$

而这冪級数在区間 $|t|\leqslant k$ 中絕对收斂，并且运算子 A 的范数不超过 k，那末級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nA^n$$

收斂。为了以后引用，只需要下面的牛頓二項式公式：

$$\sqrt{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}t^n,\quad |t|\leqslant 1, \tag{291}$$

其中

$$\binom{\frac{1}{2}}{0}=1;\ \binom{\frac{1}{2}}{n}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}。\tag{292}$$

公式(291)給出根式的算术值，并且当 $t=\pm 1$ 时仍成立 [I;136]。分解式的系数(292)对于奇数 $n>0$ 是正的，对于偶数 $n>0$ 是負的。因此，在公式(291)中設 $t=-1$，則除第一項之外都是負的，由此可得

$$0=1-\sum_{n=1}^{\infty}\left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right| \quad 或 \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right|=1,\tag{293}$$

而級数(291)在 $|t|\leqslant 1$ 中絕对地并一致地收斂 [I;146]，在公式(291)中把 t 換成 t^2-1，左边可得 t^2 平方根的絕对值，就是絕对值 $|t|$，并且它在区間 $|t|\leqslant 1$ 中可以展开成絕对收斂的級数

$$|t|=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(t^2-1)^n。\tag{294}$$

我們把这展开式应用到自共軛运算子上去。設 A 是自共軛运算子，其范数是 m_A。作自共軛运算子 $C=\frac{1}{m_A^2}A^2-E$。那末

$$(Cx,x)=\frac{1}{m_A^2}(A^2x,x)-\|x\|^2=\frac{1}{m_A^2}\|Ax\|^2-\|x\|^2,$$

由此可知当 $\|x\|=1$ 时 $-1\leqslant(Cx,x)\leqslant 0$，而 C 的范数不超过 1。于是有可能作級数

$$B=m_A\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}C^n=m_A\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\left(\frac{1}{m_A^2}A^2-E\right)^n。\tag{295}$$

如果 $S_n(t)$ 是級数(294)的部分和，那末 $S_n^2(t)$ 在区間 $[-1,+1]$ 中一致 $\to t^2$，所以 $S_n^2\left(\frac{1}{m_A}A\right)\to\frac{1}{m_A^2}A^2$，而取極限，由公式(295)定义的自共軛运算子 B 滿足条件 $B^2=A^2$。

此外，如果运算子 D 与 A 交換，那末它与級数(295)的部分和交換，所以取極限，它必与 B 交換。由此可知特別是 A 与 B 交換，即 $AB=BA$。

再証明 B 是正运算子。留意 C 的范数不大于 1，可得 $|(C^nx,x)|\leqslant\|x\|^2$，而把(295)写成

$$B=m_A\left[E+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}C^n\right],$$

可得不等式

$$(Bx, x)\geqslant m_A\left[(x, x)-\sum_{n=1}^{\infty}\left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right||(C^n x, x)|\right]\geqslant$$

$$\geqslant m_A\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right|\right]\|x\|^2,$$

由此，依(293)，可得$(Bx, x)\geqslant 0$。

如此最后得出下面的性質：B 是自共軛正运算子，与 A 交換，并滿足等式 $B^2=A^2$；凡与 A 交换的运算子必与 B 也交换。在下节中将应用运算子 B 及輔助定理 1，以作运算子 A 的譜函数 $\mathscr{E}_\lambda$，并証明 [109] 中的基本公式 (127)。

134. 譜函数 定理 50. 凡自共軛运算子 A，必有投影运算子 $\mathscr{E}_0$ 与之相应，而 $\mathscr{E}_0$ 具有下列諸性質：(1) 如果运算子 D 与 A 交換，那末它必与 $\mathscr{E}_0$ 交換；(2) 如果 $Az=0$，那末 $\mathscr{E}_0 z=z$；(3) 自共軛运算子 $A\mathscr{E}_0$ 及 $A(E-\mathscr{E}_0)$ 滿足条件

$$A\mathscr{E}_0\leqslant 0;\quad A(E-\mathscr{E}_0)\geqslant 0。\tag{296}$$

取輔助定理 1 的投影运算子 P 做 $\mathscr{E}_0$。如果 D 与 A 交換，那末它与 B 交換，因此与 $(A+B)$ 交換，而定理的前两結論可由輔助定理 1 得出。又由公式 $A=(E-2\mathscr{E}_0)B$，并由 $\mathscr{E}_0$ 与 A 及 B 交換，及 $\mathscr{E}_0^2=\mathscr{E}_0$，可知

$$A\mathscr{E}_0=-B\mathscr{E}_0;\quad A(E-\mathscr{E}_0)=B(E-\mathscr{E}_0)。$$

正运算子B 既与投影运算子 $\mathscr{E}_0$ 及 $(E-\mathscr{E}_0)$ 交換，它与它們的积必也是正运算子，而由上面公式直接可得不等式(296)，于是定理証明了。

設 λ 是任意实数。对于自共軛运算子 $(A-\lambda E)$ 可以作在剛才証明的定理中所說的投影运算子；我們用 $\mathscr{E}_\lambda$ 表示它。它具有下列性質：(1) 如果某运算子 D 与 $(A-\lambda E)$ 交換，也就是与 A 交換，那末它与 $\mathscr{E}_\lambda$ 也交換；(2) 如果 $(A-\lambda E)z=0$，那末 $\mathscr{E}_\lambda z=z$；(3) 下面不等式成立：

$$(A-\lambda E)\mathscr{E}_\lambda\leqslant 0;\quad (A-\lambda E)(E-\mathscr{E}_\lambda)\geqslant 0。\tag{297}$$

还要注意对于任意 λ，$\mathscr{E}_\lambda$ 与 $(A-\lambda E)$ 交換，所以与 A 交換。現在証明 $\mathscr{E}_\lambda$ 序

是毛單位元分解。凡 $\mathscr{E}_{\lambda_1}$ 都与 A 交换，因此，依剛才所証的，它与任意 $\mathscr{E}_{\lambda_2}$ 交换。設 $\lambda<m$。我們証明这时 $\mathscr{E}_\lambda=0$。如果不然，那末必会有一元 x，其范数等于1，而 $\mathscr{E}_\lambda x=x$，所以

$$((A-\lambda E)\mathscr{E}_\lambda x,\ x)=((A-\lambda E)x,\ x)=(Ax,\ x)-\lambda>0,$$

因为 $\lambda<m$，而这与(297)的第一不等式冲突。所以当 $\lambda<m$ 时 $\mathscr{E}_\lambda=0$。完全同样，应用(297)中的第二不等式，将証明当 $\lambda>M$ 时 $\mathscr{E}_\lambda=E$。剩下的是証明当 $\lambda<\mu$ 时 $\mathscr{E}_\lambda\leqslant\mathscr{E}_\mu$，就是說当 $\lambda<\mu$ 时 $\mathscr{E}_\lambda\mathscr{E}_\mu=\mathscr{E}_\lambda$，也就是說要証明公式

$$\mathscr{E}_\lambda(E-\mathscr{E}_\mu)=0。\tag{298}$$

把上面等式的左边表示成 R:

$$\mathscr{E}_\lambda(E-\mathscr{E}_\mu)=(E-\mathscr{E}_\mu)\mathscr{E}_\lambda=R。\tag{299}$$

必須証明对于任意元 x，$Rx=0$。令 $Rx=y$。由公式(299)直接可知：

$$\mathscr{E}_\lambda R=\mathscr{E}_\lambda^2(E-\mathscr{E}_\mu)=\mathscr{E}_\lambda(E-\mathscr{E}_\mu)=R,\ \text{同样}\ (E-\mathscr{E}_\mu)R=R。\tag{300}$$

依(297)可知

$$((A-\lambda E)\mathscr{E}_\lambda y,\ y)\leqslant 0;\quad ((A-\mu E)(E-\mathscr{E}_\mu)y,\ y)\geqslant 0。\tag{301}$$

另一方面，依(300)，

$$\mathscr{E}_\lambda y=\mathscr{E}_\lambda Rx=Rx=y;\quad (E-\mathscr{E}_\mu)y=(E-\mathscr{E}_\mu)Rx=Rx=y,$$

不等式(301)中的第一个可以写成 $((A-\lambda E)y,\ y)\leqslant 0$，而同样第二个不等式可以写成 $((A-\mu E)y,\ y)\geqslant 0$。把后一个从前一个减去，可得 $((\mu-\lambda)y,\ y)\leqslant 0$，就是說 $(\mu-\lambda)\|y\|^2\leqslant 0$，由此依 $\lambda<\mu$，可知 $y=0$，$\therefore Rx=0$，于是公式(298)証明了。$\mathscr{E}_\lambda$ 的右連續性將在下面証明。

为了証明借 $\mathscr{E}_\lambda$ 表示运算子 A 的积分式子，先介紹一个不等式。取投影运算子

$$\Delta=\mathscr{E}_\mu-\mathscr{E}_\lambda\ (\mu>\lambda);\tag{302}$$

对于任意元 x，

$$((A-\mu E)\mathscr{E}_\mu\Delta x,\ \Delta x)\leqslant 0;\quad ((A-\lambda E)(E-\mathscr{E}_\lambda)\Delta x,\ \Delta x)\geqslant 0。$$

留意显然的等式

$$\Delta^2=\Delta;\quad \mathscr{E}_\mu\Delta=(E-\mathscr{E}_\lambda)\Delta=\Delta,$$

可以把这两不等式写成：

$$((A-\mu E)\Delta x,\ x)\leqslant 0;\quad ((A-\lambda E)\Delta x,\ x)\geqslant 0,$$

就是說

$$\lambda(\Delta x,\ x)\leqslant(A\Delta x,\ x)\leqslant\mu(\Delta x,\ x)。$$

取任意一个滿足条件 $\lambda\leqslant\nu\leqslant\mu$ 的数 ν，可得

$$|((A-\nu E)\Delta x,\ x)|\leqslant(\mu-\lambda)(\Delta x,\ x),$$

留意 $(\Delta x,\ x)=\|\Delta x\|^2\leqslant\|x\|^2$，可知

$$|((A-\nu E)\Delta x,\ x)|\leqslant(\mu-\lambda)\|x\|^2。$$

由此可知[100] 运算子 $(A-\nu E)\Delta$ 的范数不超过 $(\mu-\lambda)$，就是

$$\|(A-\nu E)\Delta x\|\leqslant(\mu-\lambda)\|x\|。$$

在这不等式中把 x 换成 Δx，并留意 $\Delta^2=\Delta$，可得对于以后有基本意义的不等式

$$\|A\Delta x-\nu\Delta x\|\leqslant(\mu-\lambda)\|\Delta x\|。\tag{303}$$

在这不等式中 $\lambda\leqslant\nu\leqslant\mu$，而 Δ 由公式(302)定义。现在証明公式(127)。取一正数 ε_0，并分解区間$[m-\varepsilon_0,\ M]$成部分：

$$m-\varepsilon_0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_{n-1}<\lambda_n=M;$$

然后作投影运算子 $\Delta_k=\mathscr{E}_{\lambda_k}-\mathscr{E}_{\lambda_{k-1}}$，那末

$$E=\sum_{k=1}^{n}\Delta_k,\quad 而当\quad k\neq l\ 时\ \Delta_k\Delta_l=0。\tag{304}$$

任意元 x 可以分解成相互正交的項：

$$x=\sum_{k=1}^{n}\Delta_k x=\sum_{k=1}^{n}x_k,$$

而

$$Ax=\sum_{k=1}^{n}Ax_k。$$

不难看出，当 $k\neq l$ 时，

$$(Ax_k,\ Ax_l)=0,\quad (Ax_k,\ x_l)=0。$$

例如第一个不等式可以証明如下：

$$(Ax_k,\ Ax_l)=(A\Delta_k x,\ A\Delta_l x)=(A\Delta_l\Delta_k x,\ Ax),$$

而依(304)这式等于零。現在作

$$Ax-\sum_{k=1}^{n}\nu_k\Delta_k x=\sum_{k=1}^{n}(Ax_k-\nu_k x_k),$$

其中 ν_k 是区間$[\lambda_{k-1},\ \lambda_k]$中的任意值。右边和的諸項是相互正交的，而应用畢达哥拉定理，可得

$$\left\|Ax-\sum_{k=1}^{n}\nu_k\Delta_k x\right\|^2=\sum_{k=1}^{n}\|Ax_k-\nu_k x_k\|^2。\tag{305}$$

設 δ 是諸差值 $\lambda_k-\lambda_{k-1}$ 中的最大者。应用不等式(303)，可由(305)得：

$$\left\|Ax-\sum_{k=1}^{n}\nu_k\Delta_k x\right\|^2\leqslant\delta^2\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2,$$

而依畢达哥拉定理，

$$\left\| Ax-\sum_{k=1}^{n} v_k \Delta_k x \right\|^2 \leqslant \delta^2 \|x\|^2,$$

由此可知当 $\delta \to 0$ 时，对于任意元 x，

$$Ax=\lim \sum_{k=1}^{n} v_k \Delta_k x 。$$

諸运算子

$$\sum_{k=1}^{n} v_k \Delta_k x$$

的范数的有界性已在[108]中証明，如此可得基本公式：

$$A=\int_{m}^{M} \lambda d\mathscr{E}_\lambda 。$$

剩下的是証明 $\mathscr{E}_\lambda$ 右連續。当 μ 趋向于 λ 时，由公式(302)定义的投影运算子 Δ 不增，并趋向于某一極限 Δ_0，而我們必須証明 Δ_0 是零运算子。在(303)中取極限，可得 $(A-\lambda E)\Delta_0 x=0$。由此，依 $\mathscr{E}_\lambda$ 的第二性質，可知 $\mathscr{E}_\lambda \Delta_0 x=\Delta_0 x$，就是說 $(E-\mathscr{E}_\lambda)\Delta_0 x=0$。另一方面 $(E-\mathscr{E}_\lambda)\Delta=\Delta$，而取極限，可得 $(E-\mathscr{E}_\lambda)\Delta_0=\Delta_0$。留意 $(E-\mathscr{E}_\lambda)\Delta_0 x=0$，可得 $\Delta_0 x=0$，就是說 Δ_0 确实化任意元 x 为零。还应注意任意与 A 交换的运算子 D 必与諸 $\mathscr{E}_\lambda$ 交换。

§ 2. 空間 l_2 及 L_2

135. 空間 l_2 現在把所闡發的理論应用于希勒柏特空間的一个具体表現。取空間 l_2，其中的元是无穷复数序列 $(x_1, x_2, \cdots)$，并满足下面条件：

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \tag{1}$$

收斂[60]。在可分的空間 H 中取閉規格化正交組

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots, \tag{2}$$

則很自然地得到这个表現。这时 H 中的任意元 x 由它的傅立叶系数

$$x_k=(x, \varphi_k) \tag{3}$$

决定，而級数(1)收斂，并且元 x 可以表示成其傅立叶級数之和的

形式：

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\varphi_k。\tag{4}$$

反之，如果有一序列复数 x_k，而級数（1）收斂，那末对于由收斂級数（4）决定的元 x，諸数 x_k 是它依組（2）取的傅立叶系数 [95]。在 l_2 中的基本运算已在以前[60]討論过了。回忆元 $x(x_1, x_2, \cdots)$ 及 $y\ (y_1, y_2, \cdots)$ 的数积由下面公式决定：

$$(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\bar{y}_k,\tag{5}$$

这也可直接由上面所說的得出。数 x_k 叫做元 x 的分量。組(2)中的元的分量乃是：

$\varphi_1(1, 0, 0, 0, \cdots)$; $\varphi_2(0, 1, 0, 0, \cdots)$; $\varphi_3(0, 0, 1, 0, \cdots)$; $\cdots$。

設 $x^{(k)}$ 是 l_2 中的元，其前 k 个分量与 x 的相同，而其余分量都是零，就是說 $x^{(k)}(x_1, x_2, \cdots, x_k, 0, \cdots)$。那末

$$\|x-x^{(k)}\|^2=\sum_{s=k+1}^{\infty}|x_s|^2,$$

所以当 $k\to\infty$ 时 $x^{(k)}\Rightarrow x$。$x^{(k)}$ 叫做元 x 的段。設 A 是綫性有界运算子，并設 $x'=Ax$。可以写成

$$x'=\sum_{k=1}^{\infty}x_k A\varphi_k,$$

而像元 x' 的分量可以由下面公式表示出来：

$$x'_n=(x', \varphi_n)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k(A\varphi_k, \varphi_n)\quad (n=1, 2, 3, \cdots)。$$

作数

$$a_{nk}=(A\varphi_k, \varphi_n),\tag{6}$$

可以把上面公式写成下面形式：

$$x'_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}x_k\quad (n=1, 2, 3, \cdots)。\tag{7}$$

如此，在可分空間 H 中取某一完全規格化正交組（2），可以把 H

中每一元表成一序列复数，并可把每一綫性有界运算子表成一无穷矩陣，其中的元由公式(6)定义。这里可以用原来的記号 H 代替 l_2。我們也可以独立地考察 l_2，把它看做抽象空間 H 的一个可能表現。两种观点形式地产生同样結果。

繼續研究 H 表成 l_2 的表現。共軛运算子 A^* 与下面的矩陣相应：

$$a_{nk}^*=(A^*\varphi_k,\ \varphi_n)=(\varphi_k,\ A\varphi_n)=\overline{(A\varphi_n,\ \varphi_k)},$$

就是說

$$a_{nk}^*=\bar{a}_{kn},\tag{8}$$

而自共軛运算子的特征乃是等式

$$a_{nk}=\bar{a}_{kn}。\tag{9}$$

如果 x_n 及 y_n 各是元 x 及 y 的分量，那末双綫性泛函 $(Ax,\ y)$ 由下面公式表示：

$$(Ax,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}x_m\right)\bar{y}_n。\tag{10}$$

留意 $(Ax,\ y)=(x,\ A^*y)$，及公式(8)，可以把 $(Ax,\ y)$ 写成下面形式：

$$(Ax,\ y)=\sum_{m=1}^{\infty}x_m\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{nm}\bar{y}_n\right),\tag{11}$$

而如此可得下面取和次序交换的公式：

$$(Ax,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}x_m\right)\bar{y}_n=\sum_{m=1}^{\infty}x_m\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{nm}\bar{y}_n\right)。\tag{12}$$

設 $x^{(k)}$ 及 $y^{(l)}$ 各是 x 及 y 的段，可以写成

$$(Ax^{(k)},\ y^{(l)})=\sum_{n=1}^{l}\left(\sum_{m=1}^{k}a_{nm}x_m\right)\bar{y}_n。\tag{13}$$

但当 $k\to\infty$ 及 $l\to\infty$ 时 $(Ax^{(k)},\ y^{(l)})\to(Ax,\ y)$，所以当 k 及 l 互相无关地趋向无穷时，可得公式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}x_m\right)\bar{y}_n=\lim_{\substack{k\to\infty\\ l\to\infty}}\sum_{n=1}^{l}\sum_{m=1}^{k}a_{nm}x_m\bar{y}_n。\tag{14}$$

如果 a_{pq} 及 b_{pq} 各是与运算子 A 及 B 相应的矩陣中的元，那末与运算子 $D=BA$ 相应的乃是矩陣 d_{pq}，由下面公式决定：

$$d_{pq}=(D\varphi_q,\ \varphi_p)=(BA\varphi_q,\ \varphi_p)=(A\varphi_q,\ B^*\varphi_p),$$

而依(5)，

$$d_{pq}=\sum_{s=1}^{\infty}(A\varphi_q,\ \varphi_s)\cdot\overline{(B^*\varphi_p,\ \varphi_s)}=\sum_{s=1}^{\infty}a_{sq}\overline{b^*}_{sp}。$$

留意(8)，可得

$$d_{pq}=\sum_{s=1}^{\infty}b_{ps}a_{sq}。\tag{15}$$

用表示相应运算子的記号 A 及 B 表示无穷矩陣，而其相应元用 $\{A\}_{pq}$ 及 $\{B\}_{pq}$ 表示，可以把上面公式写成下面形式：

$$\{BA\}_{pq}=\sum_{s=1}^{\infty}\{B\}_{ps}\{A\}_{sq}。\tag{16}$$

如果有三个綫性有界运算子 A，B 及 C，那末依結合律 $(CB)A=$ $=C(BA)$ 可以写出下面改换取和次序的結合公式：

$$\sum_{t=1}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{\infty}\{C\}_{ps}\{B\}_{st}\right)\{A\}_{tq}=$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}\{C\}_{ps}\left(\sum_{t=1}^{\infty}\{B\}_{st}\{A\}_{tq}\right)。\tag{17}$$

136　有界运算子　凡有界綫性运算子 A 必产生一无穷矩陣 a_{pq}，已如上述。提出逆問題：无穷矩陣的諸元 a_{pq} 应滿足什么条件，才能使公式(7)表示 l_2 中的一个有界綫性运算子？如此，我們要求对于 l_2 中的任意元 $(x_1,\ x_2,\ \cdots)$ 級数(7)应当收斂，并且存在一数 N，使任意元滿足不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}x_k\right|^2\leqslant N^2\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2。\tag{18}$$

提醒一下，对于双綫性泛函，在有界运算子 A 的情形，应当有不等式

$$|(Ax,\ y)|\leqslant N^2\|x\|\cdot\|y\|。$$

把这不等式应用于各元的段，可得关于 a_{pq} 的必要条件：

$$\left|\sum_{n=1}^{l}\sum_{m=1}^{k} a_{nm} x_m \bar{y}_n\right|^2 \leqslant N^2 \sum_{m=1}^{k} |x_m|^2 \sum_{n=1}^{l} |y_n|^2。\tag{19}$$

这条件不仅是必要的，而且是充分的，就是說下面定理成立：

定理 1. 为了 a_{pq} 是綫性有界映像的矩陣的元，必須且只須对于任意整数 k 及 l 及任意复数 x_m 及 y_n，可以选擇一个与 k 及 l 无关的数 N，使条件 (19) 满足。

条件的必要性已經在上面証明了。現在証明其充分性。設 $(x_1, x_2, \cdots)$ 是 l_2 中的任意元。依条件(19)，令 $l=k$，及

$$y_n=\sum_{m=1}^{k} a_{nm}x_m \quad (n=1, 2, 3, \cdots, k)。$$

那末这就給出

$$\left(\sum_{n=1}^{k}\left|\sum_{m=1}^{k} a_{nm}x_m\right|^2\right)^2 \leqslant N^2 \sum_{m=1}^{k} |x_m|^2 \cdot \sum_{n=1}^{k}\left|\sum_{m=1}^{k} a_{nm}x_m\right|^2,$$

就是

$$\sum_{n=1}^{k}\left|\sum_{m=1}^{k} a_{nm}x_m\right|^2 \leqslant N^2 \sum_{m=1}^{k} |x_m|^2,$$

因此

$$\sum_{n=1}^{k}\left|\sum_{m=1}^{k} a_{nm}x_m\right|^2 \leqslant N^2 \sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^2。\tag{20}$$

現在証明由这不等式可知下面級数收斂：

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}x_m \quad (n=1, 2, \cdots)。\tag{21}$$

其中 $\{x_m\}$ 表 l_2 中任意元。假設有某一元 $(x_1^0, x_2^0, \cdots)$ 及一数 n，使这級数發散。这时下面級数一定更是發散的：

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}x_m^0|,$$

而这級数的有穷和

$$\sum_{m=1}^{k} |a_{nm}x_m^0|$$

当 k 增加时一定无限地增大。改变諸复数 x_m^0 的幅角，使乘积 $a_{nm}x_m^0$ 是正数。把不等式 (20) 应用于如此得出的屬于 l_2 的元，并在左边把与所論值 n 相应項以外的一切項除去，可得

$$\left(\sum_{m=1}^{k} a_{nm}x_m^0\right)^2 \leqslant N^2 \sum_{m=1}^{\infty} |x_m^0|^2。$$

无限地增大 k，这不等式的左边无限地增大，于是得出矛盾。如此一切級数(21)确实对于任意元 x 收斂。現在証明由(20)可得不等式

$$\sum_{n=1}^{k} \left|\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}x_m\right|^2 \leqslant N^2 \sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^2。\tag{22}$$

事实上，如果对于某一 k 及 l_2 中某一元 x 相反的不等式成立，那末对于这 k 及足够大的 l（显然可以設 $l\geqslant k$），得

$$\sum_{n=1}^{k} \left|\sum_{m=1}^{l} a_{nm}x_m\right|^2 > N^2 \sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^2,$$

从而

$$\sum_{n=1}^{l} \left|\sum_{m=1}^{l} a_{nm}x_m\right|^2 > N^2 \sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^2,$$

而这与在(20)中令 $k=l$ 所得的結果冲突。如此不等式 (22) 証明了。在其中无限地增大 k，可得(18)，定理于是証明了。

注　留意，在証明条件(19)的充分性时只应用了这条件当 $l=k$ 时的特殊情形。現在証明只須就二次式假設这条件就够了，就是說，矩陣表示有界运算子的充分条件乃是对于任意 k，

$$\left|\sum_{n,m=1}^{k} a_{nm}x_m\bar{x}_n\right| \leqslant N \sum_{m=1}^{k} |x_m|^2。\tag{19$_1$}$$

留意[99]中的公式(44)，即用相应二次式表示双綫性泛函的公式，并留意 (19_1)，可得

$$\left|\sum_{m,n=1}^{k} a_{nm}x_m\bar{y}_n\right| \leqslant \frac{N}{4}\Big[\sum_{m=1}^{k} |x_m+y_m|^2 +$$
$$+\sum_{m=1}^{k} |x_m-y_m|^2 + \sum_{m=1}^{k} |x_m+iy_m|^2 + \sum_{m=1}^{k} |x_m-iy_m|^2\Big]。$$

設元 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$，$(y_1, y_2, \cdots, y_k)$ 的范数等于 1，留意 $|\alpha+\beta|^2 \leqslant 2[|\alpha|^2+|\beta|^2]$，

$$\left|\sum_{m,n=1}^{k} a_{nm} x_m \bar{y}_n\right| \leqslant 4N,$$

对于具有任意范数的元：

$$\left|\sum_{m,n=1}^{k} a_{nm} x_m \bar{y}_n\right| \leqslant 4N\left[\sum_{m=1}^{k}|x_m|^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\sum_{m=1}^{k}|y_m|^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

就是說，由 (19_1) 可得 $k=l$ 时的条件(19)，于是依定理的証明可得由矩陣 a_{nm} 定义的运算子是有界的。还要注意一些与条件(19)有关的情形。如果 a_{pq} 滿足条件(19)，那末共軛运算子 $\{A^*\}_{pq}=\bar{a}_{qp}$ 的矩陣的元显然也滿足这条件；这与在一般理論中所得的結果相符。再介紹轉置运算子的矩陣及复数共軛运算子的矩陣

$$\{A'\}_{pq}=a_{qp};\quad \{\bar{A}\}_{pq}=\bar{a}_{pq}。\tag{23}$$

显然

$$A^*=(\bar{A})'=\bar{A}',\tag{24}$$

而如果原来矩陣 A 的元滿足条件(19)，那末运算子 A' 及 $\bar{A}$ 的矩陣元也必滿足(19)。由(19)直接可得一切 a_{pq} 必为同一个与 p，q 无关的数所界，就是說令 $x_p=y_q=1$，其余 x_m 及 $y_n=0$，可得 $|a_{pq}|\leqslant N$。还要留意有界映像的矩陣的元所应滿足的一个必要条件。由公式(6)可知 a_{nk} 是元 $A\varphi_k$ 的分量。因此，矩陣任意列的元的絕对值平方所組成的級数一定收斂：

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{nk}|^2<+\infty\quad (k=1, 2, \cdots)。\tag{25}$$

考察 A^*，可知关于行，也有同样結果：

$$\sum_{m=1}^{\infty}|a_{km}|^2<+\infty\quad (k=1, 2, \cdots)。\tag{26}$$

注意与矩陣 a_{nm} 相应的映像是有界的一个簡單充分条件。

定理 2. 如果存在一个与 m 及 n 无关的正数 l，使不等式

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| \leqslant l \quad (n=1, 2, \cdots); \tag{27_1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{nm}| \leqslant l \quad (m=1, 2, \cdots) \tag{27_2}$$

成立，那末矩陣 a_{nm} 表現一个有界映像。

只須証明当 $\|x\| \leqslant 1$ 及 $\|y\| \leqslant 1$ 时，和

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}||x_m||y_n| \tag{28}$$

有界。如此則条件(19)自然成立了。留意 $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(|a|^2+|b|^2)$，可得

$$S \leqslant \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| (|x_m|^2+|y_n|^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(|x_m|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_{nm}| \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(|y_n|^2 \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| \right),$$

依(27)，

$$S \leqslant \frac{l}{2} \sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^2 + \frac{l}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 \leqslant \frac{l}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2) \leqslant l,$$

而定理証明了。在自共軛矩陣的情形中条件(27_2)化成条件(27_1)。留意并非对于任意有界矩陣級数(28)都是收斂的。下面將有它發散的例。

137. 么范矩陣及投影矩陣　回忆一下么范映像 U 的基本特征：

$$U^*U = UU^* = E。$$

如果 u_{pq} 是与么范运算子 U 相应的矩陣的元，那末上面特征可以写成下面形式：

$$\sum_{s=1}^{\infty} u_{ps}^* u_{sq} = \delta_{pq}; \quad \sum_{s=1}^{\infty} u_{ps} u_{sq}^* = \delta_{pq}, \tag{29}$$

其中当 $p \neq q$ 时 $\delta_{pq}=0$，而 $\delta_{pp}=1$。留意 $u_{mn}^* = \bar{u}_{nm}$，可以把上面等式写成下面形式：

$$\sum_{s=1}^{\infty} \bar{u}_{sp} u_{sq} = \delta_{pq}, \tag{30_1}$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} u_{ps}\bar{u}_{qs}=\delta_{pq}, \tag{30$_2$}$$

就是說可得矩陣 u_{pq} 行及列的正交性。注意在有穷矩陣的情形中条件 (30_2) 是 (30_1) 的推論 [III;28]。在无穷矩陣的情形这两条件是彼此无关的。

定理 3. 为了諸复数 u_{pq} 組成与么范映像相应的矩陣，必須且只須条件 (30_1) 及 (30_2) 成立。

条件 (30_1) 及 (30_2) 的必要性已由前面的推理得出。剩下的只是証明其充分性，就是說要証明在这条件之下矩陣 u_{pq} 与綫性(有界)映像相应。由此，这映像的么范性可以得出，因为条件 (30_1) 及 (30_2) 与 (29) 同效，而后者乃是么范映像的特征。

由条件 (30_2) 可知

$$\sum_{s=1}^{\infty} |u_{ps}|^2=1,$$

所以对于任意元下面級数收斂[60]：

$$x'_n=\sum_{k=1}^{\infty} u_{nk}x_k. \tag{31}$$

作

$$\sum_{p=1}^{m}\left|\sum_{q=1}^{n} u_{pq}x_q\right|^2=\sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} u_{ps}\bar{u}_{pt}x_s\bar{x}_t=$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\left(\sum_{p=1}^{m} u_{ps}\bar{u}_{pt}\right)x_s\bar{x}_t.$$

无限地增大 m，依条件 (30_1) 可得

$$\sum_{p=1}^{\infty}\left|\sum_{q=1}^{n} u_{pq}x_q\right|^2=\sum_{q=1}^{n}|x_q|^2,$$

因此

$$\sum_{s=1}^{m}\left|\sum_{q=1}^{n} u_{pq}x_q\right|^2\leqslant\sum_{q=1}^{\infty}|x_q|^2,$$

其中 m 是任意固定的有穷数。由此与在上节的定理 1 中完全一样，可借归謬証法而知当 $n=\infty$ 时这不等式也成立，于是无限地增大 m，可得不等式

$$\sum_{p=1}^{\infty}\left|\sum_{q=1}^{\infty} u_{pq}x_q\right|^2 \leqslant \sum_{q=1}^{\infty}|x_q|^2, \tag{32}$$

而运算子 U 的有界性証明了。注意既然 U 是么范的，公式 (32) 中自然是等号成立。

现在考察与某一子空間 L 中的投影运算子 P 相应的矩陣 p_{ik}。留意 P 是自共軛运算子而 $P^2=P$，可得下面的条件：

$$p_{ki}=\bar{p}_{ik};\quad \sum_{s=1}^{\infty} p_{is}p_{sk}=p_{ik}。 \tag{33}$$

与上面对于么范映像所做的一样，可以証明：为使矩陣 p_{ik} 与投影运算子相应，这条件不仅必要，而且也是充分的。取閉規格化正交組为坐标基，使其中的一部分是子空間 L 中的閉組，而另外一部分是在补空間 $H-L$ 中的閉組。既然 P 是投影运算子，第一部分中的諸坐标基不受 P 作用的影响，而第二部分中的被 P 化为零。如此，經选擇这一組坐标基后投影运算子 P 与純对角矩陣相应，其主对角綫上諸元只是 1 或 0。换句話說，投影运算子的矩陣与一个純对角矩陣么范地相抵[122]，而这对角矩陣的主对角綫上諸元只是零或 1。

138. 自共軛运算子 自共軛矩陣 A 的特征乃是 (19) 及 (9)。这种矩陣的固有值及固有元由下面的条件决定，就是无穷組

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{is}x_s=\lambda x_i \quad (i=1, 2, \cdots) \tag{34}$$

在 l_2 中有异于零的解。如果諸固有元 ψ_k 成一閉規格化正交組，并取 ψ_k 为坐标基，那末运算子 A 的相应矩陣的元是

$$a_{pq}=(A\psi_q, \psi_p)=\lambda_q(\psi_q, \psi_p)=\begin{cases}0 & \text{如果 } p\neq q,\\ \lambda_p & \text{如果 } p=q,\end{cases}$$

就是說可得一純对角矩陣，其主对角綫上諸元正是 λ_p。一般說来，为了自共軛矩陣有純点譜，必須且只須它与一个純对角矩陣么范地相抵。在上述取 ψ_k 为坐标基的情形下，我們有：

$$(Ax, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s x_s \bar{y}_s; \quad (Ax, x) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s |x_s|^2。 \tag{35}$$

在一般情形下对于自共軛矩陣 a_{ik} 必存在主單位元分解 $\mathscr{E}_\lambda$，就是說存在不減的投影矩陣 $l_{ik}(\lambda)$，使

$$l_{ik}(a) = 0; \quad l_{ik}(b) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } i \neq k, \\ 1 & \text{如果 } i = k, \end{cases}$$
$$(i, k = 1, 2, \cdots);$$

于是下面公式成立：

$$x_i' = \sum_{s=1}^{\infty} a_{is} x_s = (Ax, \varphi_i) = \int_a^b \lambda d(\mathscr{E}_\lambda x, \varphi_i) =$$
$$= \int_a^b \lambda d\left(\sum_{s=1}^{\infty} l_{is}(\lambda) x_s \right),$$

就是說

$$a_{is} = \int_a^b \lambda dl_{is}(\lambda), \tag{36}$$

就是

$$\left.\begin{aligned} (Ax, y) &= \int_a^b \lambda d\left(\sum_{s,t=1}^{\infty} l_{st}(\lambda) x_t, \bar{y}_s \right); \\ (Ax, x) &= \int_a^b \lambda d\left(\sum_{s,t=1}^{\infty} l_{st}(\lambda) x_t, \bar{x}_s \right); \end{aligned}\right\} \tag{36$_1$}$$

依主單位元分解的性質，如果 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$，則有：

$$\sum_{s=1}^{\infty} l_{is}(\lambda_1) l_{sk}(\lambda_2) = \sum_{s=1}^{\infty} l_{is}(\lambda_2) l_{sk}(\lambda_1) = l_{ik}(\lambda_1), \tag{37}$$

一般說来，有：

$$\sum_{s=1}^{\infty} \Delta_1 l_{is}(\lambda) \cdot \Delta_2 l_{sk}(\lambda) = \Delta_1 \Delta_2 l_{ik}(\lambda), \tag{38}$$

其中右边乃是 $l_{ik}(\lambda)$ 在区間 $\Delta_1 \Delta_2$ 两端值的差，而 $\Delta_1 \Delta_2$ 是两区間 Δ_1 及 Δ_2 的共同部分。如果 $f(\lambda)$ 是区間 $[a, b]$ 上的連續函数，那末运算子 $f(A)$ 与下面的矩陣相应：

$$\{f(A)\}_{ik} = \int_a^b f(\lambda) dl_{ik}(\lambda)。 \tag{39}$$

应用(38)，可以写成

$$\sum_{s=1}^{\infty}\int_a^b f_1(\lambda)dl_{is}(\lambda)\cdot\int_a^b f_2(\lambda)dl_{sk}(\lambda)=$$

$$=\int_a^b f_1(\lambda)f_2(\lambda)dl_{ik}(\lambda)。\tag{40}$$

留意双綫性式

$$(\mathscr{E}_\lambda x,\ y)=\sum_{s,t=1}^{\infty} l_{st}(\lambda)x_t\bar{y}_s\tag{41}$$

是 λ 的囿变函数，可知函数 $l_{st}(\lambda)$ 是 λ 的囿变函数。当 $y=x$ 时式(41)乃是 λ 的不減函数，由此可知函数 $l_{ss}(\lambda)$ 是不減的。如果把积分(39)了解成斯提勒杰斯-勒貝格积分，那末公式(39)适用于很寬广的函数类 $f(\lambda)$，这类曾于 [123] 中論及。只須設 $f(\lambda)$ 有界，并且是 B 函数就够了[48]。这时它依任意不減函数都是可測的。在純連續譜的情形下，一切函数 $l_{ik}(\lambda)$ 都是連續的。逆命題也是正确的。在混合譜的情形下，考察子空間 L，設在 L 中运算子 A 有純点譜，而在补子空間 $H-L$ 中 A 有純連續譜。在这些子空間中取閉規格化正交組。用 $(x_1',\ x_2',\ \cdots)$ 表 L 中的諸元，$(x_1'',\ x_2'',\ \cdots)$ 表 $H-L$ 中的諸元，可以把双綫性式及二次式写成下面形式：

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}x_k\bar{y}_i&=\sum_k\lambda_k x_k'\bar{y}_k'+\int_a^b\lambda d\left(\sum_{s,t=1}^{\infty} l_{st}(\lambda)x_t''\bar{y}_s''\right),\\ \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}x_k\bar{x}_i&=\sum_k\lambda_k|x_k'|^2+\int_a^b\lambda d\left(\sum_{s,t=1}^{\infty} l_{st}(\lambda)x_t''\bar{x}_s''\right),\end{aligned}\right\}\tag{42}$$

其中的 $l_{st}(\lambda)$ 是連續的。

考察矩陣 A 的豫解式，就是矩陣 $R_{ik}(\lambda)$，其中諸元由下面公式定义：

$$\|R_{ik}(\lambda)\|=(A-\lambda E)^{-1}。$$

那末

$$R_{ik}(\lambda)=\int_a^b\frac{dl_{ik}(\mu)}{\mu-\lambda},\tag{43}$$

其中設 λ 不屬于 A 的譜。留意依公式(39)，A 的正整次冪可以表成

$$\{A^m\}_{ik}=\int_a^b \lambda^m dl_{ik}(\lambda)。 \tag{44}$$

如果 $\lambda=0$ 不屬于 A 的譜，就是說，如果一切 $l_{ik}(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 的某一鄰域中是常数，那末存在有界逆矩陣 A^{-1}，而关于其冪有下面公式：

$$\{A^{-m}\}_{ik}=\int_a^b \lambda^{-m} dl_{ik}(\lambda)。 \tag{45}$$

139. 連續譜的情形 我們已知，可以繼續分解 $H-L$ 成依 A 不变的子空間，使在每个这样的子空間中 A 有純連續譜。設 H_1 是如此的子空面。在它之中取閉正交組（2），并設把 H_1 看做希勒柏特空面，在其中取坐标基 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$，使凡元 x 可由其分量 $(x_1, x_2, \cdots)$ 决定。設 x 是 H_1 中的元，使諸 $\mathscr{E}_\lambda x$ 的閉綫性鞘是整个 H_1，而 $a\leqslant\lambda\leqslant b$。用 $p_k(\lambda)$ 表示元 $\mathscr{E}_\lambda x$ 的分量。对于 H_1 中任意元 $y(y_1, y_2, \cdots)$ 可作函数

$$\varphi_y(\lambda)=(y, \mathscr{E}_\lambda x)=\sum_{k=1}^{\infty}\overline{p_k(\lambda)}y_k。 \tag{46}$$

留意[115]中的公式(175)，可以把双綫性泛函写成以下形式

$$(Ay, z)=\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}y_k\bar{z}_i=\int_a^{\infty}\lambda\frac{d\sum\limits_{k=1}^{\infty}\overline{p_k(\lambda)}y_k\cdot d\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_i(\lambda)\bar{z}_i}{d\rho(\lambda)},$$

其中

$$\rho(\lambda)=\|\mathscr{E}_\lambda x\|^2=\sum_{s=1}^{\infty}|p_s(\lambda)|^2, \tag{47}$$

所以，取上述一組坐标基之后，对确定 H_1 中映像 A 的那个矩陣來說，它的元是：

$$a_{ik}=\int_a^b \lambda\frac{d\overline{p_k(\lambda)}\,dp_i(\lambda)}{d\rho(\lambda)}。 \tag{48}$$

又，与 H_1 中任意元 y 相应的是依 $\rho(\lambda)$ 在 $[a, b]$ 上的 L_2 中的函数

$y(\lambda)$，适合

$$\varphi_y(\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\overline{p_k(\lambda)}y_k=\int_a^{\lambda}y(\mu)d\rho(\mu), \tag{49}$$

而反之，L_2 中的任意函数 $y(\lambda)$ 必有 H_1 中一确定元 y 与之相应。这时，对应关系保存范数及数积不变。如果用 $\varphi_k(\lambda)$ 表示与坐标基 φ_k 相应的函数 $y(\lambda)$，那末可得

$$\overline{p_k(\lambda)}=\int_a^{\lambda}\varphi_k(\mu)d\rho(\mu), \tag{50}$$

而 $\varphi_k(\lambda)$ $(k=1, 2, \cdots)$ 組成 L_2 中的一个規格化閉正交組。H_1 中的运算子 A 与 L_2 中乘 λ 的运算相应，而对于 $a_{ik}=(A\varphi_k, \varphi_i)$ 可以代替(48)而写成公式

$$a_{ik}=\int_a^b\lambda\varphi_k(\lambda)\overline{\varphi_i(\lambda)}d\rho(\lambda)。 \tag{51}$$

設不用 $\varphi_k(\lambda)$ 而取 L_2 中另一完全規格化正交組 $\psi_k(\lambda)$，而 $\psi_k(\lambda)$ $(k=1, 2, \cdots)$ 与 H_1 中某一完全坐标基組 ψ_k 相应。取 H_1 中把坐标基 φ_k 变换成坐标基 ψ_k 的么范映像 U，就是設 $U\varphi_k=\psi_k$。与 H_1 中这么范映像 U 相应的是某一矩陣，而这矩陣依从于坐标基的选择。如果取坐标基 φ_k 或 ψ_k，那末可得同一矩陣，其元是

$$c_{ik}=(U\varphi_k, \varphi_i)=(\psi_k, \varphi_i)$$

或

$$c_{ik}=(U\psi_k, \psi_i)=(\psi_k, U^*\psi_i)=(\psi_k, U^{-1}\psi_i)=(\psi_k, \varphi_i)。$$

既然由 H_1 变换到 L_2 时不改变数积，可以写成

$$c_{ik}=\int_a^b\psi_k(\lambda)\overline{\varphi_i(\lambda)}d\rho(\lambda)。 \tag{52}$$

在新的坐标基中与运算子 A 相应的矩陣的元由与公式(51)相类似的公式决定：

$$b_{ik}=\int_a^b\lambda\psi_k(\lambda)\overline{\psi_i(\lambda)}d\rho(\lambda)。 \tag{53}$$

如果 x_k $(k=1, 2, \cdots)$ 是以 φ_k 为坐标基时某元的分量，而 x'_k 是以

ψ_k 为坐标基时同一元的分量，那末 $x_k=(x, \varphi_k)$，而 $x'_k=(x, \psi_k)=$
$=(x, U\varphi_k)=(U^{-1}x, \varphi_k)$，由此看出，$(x'_1, x'_2, \cdots)$ 可以由 $(x_1, x_2, \cdots)$ 用与么范矩陣 c_{ik} 相逆的矩陣表示出来。如此，如果用 A, B, C 各表具有元 a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} 的矩陣，可以写出矩陣等式

$$B=C^{-1}AC\text{。} \tag{54}$$

应用[115]中的公式(173_1)，以及(49)与(50)，可以写成

$$\{\mathscr{E}_\mu\}_{ik}=l_{ik}(\mu)=\int_a^\mu \varphi_k(\lambda)\overline{\varphi_i(\lambda)}d\rho(\lambda)\text{。} \tag{55}$$

留意(39)，可以写出矩陣 $f(A)$(在坐标基 φ_k 中)的元，其中 $f(\lambda)$ 是定义于区間 $[a, b]$ 上的任意有界 B 函数：

$$\{f(A)\}_{ik}=\int_a^b f(\lambda)\varphi_k(\lambda)\overline{\varphi_i(\lambda)}d\rho(\lambda)\text{。} \tag{56}$$

如果 $f(\lambda)=1:(\lambda-\mu)$，可得上面运算子的豫解式：

$$R_{ik}(\mu)=\int_a^b \frac{\varphi_k(\lambda)\overline{\varphi_i(\lambda)}}{\lambda-\mu}d\rho(\lambda)\text{。} \tag{57}$$

如果 $f(\lambda)$ 是实函数，那末 $f(A)$ 是自共軛运算子，而与(55)完全相类，可以写出运算子 $f(A)$ 的譜函数 $\mathscr{E}'_\mu$ 的元：

$$\{\mathscr{E}'_\mu\}_{ik}=\int_{C_\mu}\varphi_k(\lambda)\overline{\varphi_i(\lambda)}d\rho(\lambda)\text{，} \tag{58}$$

其中 C_μ 是由不等式 $f(\lambda)\leqslant\mu$ 定义的值 λ 的集合。我們不去詳述这些公式的証明。$f(A)$ 的譜可以依从于 $f(\lambda)$ 的性質而有不同的特性。

上面，我們曾由已知的在 H_1 中自共軛运算子 A 及这样的元 x 出發，使 $\mathscr{E}_\lambda x$ 的閉綫性稃是 H_1。取坐标基 φ_k，可以达到 l_2，及无穷矩陣，且上面那些公式成立。反之，可以取区間 $[a, b]$ 上任意的連續不減函数 $\rho(\lambda)$，在 $\lambda=a$ 时 $\rho(\lambda)=0$ 的，并取一閉規格化正交組 $\varphi_k(\lambda)$。这时公式(51)决定元 a_{ik}，后者显然满足 $\overline{a}_{ik}=a_{ki}$。不难証明，具有元 a_{ik} 的矩陣与 l_2 中的有界运算子相应。事实上，

用 N 表示区間 $[a, b]$ 上絕对値 $|\lambda|$ 的最大値，則依(51)：

$$\left|\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik} x_k \bar{x}_i\right| \leqslant N \int_a^b \left|\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(\lambda) x_k\right|^2 d\rho(\lambda),$$

而留意 $\varphi_k(\lambda)$ 的規格化正交性，可知

$$\left|\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik} x_k \bar{x}_i\right| \leqslant N \sum_{k=1}^{m} |x_k|^2,$$

由此可知相应运算子的有界性。它的自共軛性由 $\bar{a}_{ik} = a_{ki}$ 得出。公式(55)定义依从于参数 μ 的投影运算子的元，并且是主單位元分解，而显然

$$a_{ik} = \int_a^b \lambda d\{\mathscr{E}_\lambda\}_{ik},$$

就是說 $\mathscr{E}_\lambda$ 是运算子 A 的譜函数。如果在公式(50)中取共軛量，那末得出元 $\mathscr{E}_\lambda x$ 的分量 $p_k(\lambda)$，当 $\lambda = b$ 时就是元 x 的分量。由(50)，依閉性方程，可知 $\rho(\lambda)$ 由公式(47)表示。在具有連續譜的自共軛运算子 A 的一般情形，作相互正交的不变子空間 $H_1, H_2, \cdots$，在每个 H_i 中运算子 A 具有簡單譜。在每个 H_k 中取其坐标基，則对于每个 H_k 可得上面形式的公式。然后最后的式子，例如关于双綫性式 (Ax, y) 的，可以借每个 H_k 中的双綫性式相加而得出。

可以放弃譜函数 $\mathscr{E}_\lambda$ 連續性的要求而容易地將簡單譜的概念一般化。与以前一样，应当存在元 x，使 $\mathscr{E}_\lambda x$ 組成整个 H。这时，由公式(47)定义的不減函数 $\rho(\lambda)$ 不一定要是連續的。显然我們可以設 x 是規格化元，而这时除 $\rho(a) = 0$ 外还有 $\rho(b) = 1$ 成立。如果，比方說，A 有純点譜，而一切固有値的秩都等于 1，那末取 x 为任意元，但其依一閉組固有元的一切傅立叶系数都不是零，我們可以結論 $\mathscr{E}_\lambda x$ 組成整个 H，而上述的譜是簡單的。在有重固有値的时候，不难看出譜不能是簡單的。如果在分解整个 H 成固有値子空間及連續譜子空間时两种子空間都有簡單譜，我們得出簡單

譜的一般情形。在第一子空間中譜是簡單的必要且充分的条件是一切固有值都是單的。如果簡單譜不是連續的，那末 $\mathscr{E}_\lambda$ 有跃度，而依公式(47)定义的 $\rho(\lambda)$ 在 $\mathscr{E}_\lambda$ 的間断点处也应当有間断。事实上，如果在譜函数 $\mathscr{E}_\lambda$ 的間断点 $\lambda=\lambda'$ 处函数 $\rho(\lambda)$ 是連續的，那末 $(\mathscr{E}_{\lambda'}-\mathscr{E}_{\lambda'-0})x=0$，而由 $\mathscr{E}_\lambda x$ 生成的空間中的一切元与相应于固有值 $\lambda=\lambda'$ 的固有元正交，而由此可知 $\mathscr{E}_\lambda x$ 不能生成整个 H。

140. 雅科比矩陣 設在无穷維空間 H 中自共軛运算子 A 有簡單連續譜。把 λ 的冪依 $\rho(\lambda)$ 在区間 $[a, b]$ 上正交化，可得一組实多項式 $P_k(\lambda)$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$，做为上节中的閉組 $\varphi_k(\lambda)$，$P_k(\lambda)$ 的次数是 k，

$$\int_a^b P_i(\lambda)P_k(\lambda)d\rho(\lambda)=\begin{cases}0 & \text{如果 } i\neq k,\\ 1 & \text{如果 } i=k。\end{cases} \tag{59}$$

在每个多項式 $P_k(\lambda)$ 中最高次系数可以設是正的。在以前的記号中諸函数 $\varphi_k(\lambda)$ 是从 $k=1$ 起編号的。現在从 $k=0$ 起来編諸 $P_k(\lambda)$，而 k 表示 $P_k(\lambda)$ 的次数。如此 $P_k(\lambda)$ 代替了 $\varphi_{k+1}(\lambda)$。在所选的坐标基中，与运算子 A 相应的矩陣的元依(51)是由下面公式决定：

$$a_{ik}=\int_a^b \lambda P_i(\lambda)P_k(\lambda)d\rho(\lambda) \quad (i, k=0, 1, 2, \cdots)。 \tag{60}$$

設 $k-i>1$。这时积 $\lambda P_i(\lambda)$ 是次数低于 k 的多項式；这积可以表成諸 $s<k$ 的 $P_s(\lambda)$ 的一次組合式，而依(59)，这时积分(60)等于零。同样，当 $i-k>1$ 时，它也等于零，因为 $a_{ik}=a_{ki}$；就是說当 $|i-k|>0$ 时 $a_{ik}=0$。采用下面的記号：

$$a_k=\int_a^b \lambda P_k^2(\lambda)d\rho(\lambda); \quad b_k=\int_a^b \lambda P_k(\lambda)P_{k+1}(\lambda)d\rho(\lambda), \tag{61}$$

$$(k=0, 1, 2, \cdots)。$$

数 b_k 出現于用 $P_s(\lambda)$ $(s=0, 1, 2, \cdots, k+1)$ 表示积 $\lambda P_k(\lambda)$ 的一次式中：

$$\lambda P_k(\lambda)=b_k P_{k+1}(\lambda)+\sum_{s=0}^{k} c_s^{(k)} P_s(\lambda), \tag{62}$$

而由于多項式 $P_m(\lambda)$ 的最高項系数是正的，可知 $b_k>0$。由 (60) 及上面所說的可知

$$a_{k,k}=a_k,\ a_{k,k+1}=a_{k+1,k}=b_k; \tag{63}$$

$$\text{当}\quad |i-k|>1 \text{ 时 } a_{ik}=0,$$

而如此，在所选的坐标基系中，映像的矩陣表示成下面形式：

$$\left\|\begin{matrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & b_2 & a_3 & b_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}\right\|, \tag{64}$$

其中 $b_k>0$。滿足条件(63)的自共軛矩陣叫做雅科比矩陣。如此当适当地選擇坐标基时，具有簡單連續譜的自共軛运算子的矩陣是雅科比矩陣。

应用公式(59)及記号(61)，不难計算展开式(62)中的系数，只須先把两边乘上 $P_m(\lambda)d\rho(\lambda)$ 并依 λ 积分。当 $m<k-1$ 时，与以前一样，乘积 $\lambda P_k(\lambda)P_m(\lambda)d\rho(\lambda)$ 的积分等于零，所以，$c_m^{(k)}=0$ 当 $m<k-1$ 时成立。当計算其余系数时，使用記号(61)并得出下面关于諸多項式 $P_m(\lambda)$ 間的关系：

$$\lambda P_k(\lambda)=b_k P_{k+1}(\lambda)+a_k P_k(\lambda)+b_{k-1}P_{k-1}(\lambda), \tag{65}$$

而

$$P_{-1}(\lambda)=0;\quad P_0(\lambda)=1。 \tag{66}$$

上面曾指出，可以設 $\rho(b)=1$，从而可以得出上面的公式，而第一个可以取做定义。与在上节中一样，可以由連續不減函数 $\rho(\lambda)$ 出發，作依 $\rho(\lambda)$ 正交的多項式組，及依公式(60)作雅科比矩陣的諸元。依[136]中所述，矩陣(64)中的諸元应当是依絕对值有界的。这也可以由(61)容易地得出。上面的推理可以引导到下面

的結果:

定理 4. 凡与具有簡單連續譜的有界运算子相应的一切自共轭矩陣必与某一做 (64) 形式的雅科比矩陣么范相抵，这矩陣的元有界，而 $b_k>0$。我們可以依 (60) 得出一切这样的矩陣来，其中 $[a, b]$ 是任意有穷区間，$\rho(\lambda)$ 是这区間上的非負連續函数，遵守条件 $\rho(a)=0$ 及 $\rho(b)=1$(后一条件是无关宏旨的)，$P_i(\lambda)$ 是依 $\rho(\lambda)$ 的規格化正交多項式組。

將从預知的雅科比矩陣出發，并設在这矩陣中 $a_{ik}=\bar{a}_{ki}$ 当 $|i-k|=1$ 时不是零。如果由出發的坐标基組轉变到新的組，以 $e^{i\omega_k}$ 形式的式子乘每一坐标基，那末不难証明，当适当地选擇諸 ω_k 时可以得出一个与原来矩陣么范相抵的雅科比矩陣来，其中当 $|i-k|=1$ 时 a_{ik} 是正数。如此，可以設預知的雅科比矩陣是做 (64) 的形式，其中显然 a_k 是实数，而 $b_k>0$。留意 [136] 中的定理 2 及定理 1 的一个系，可以結論，要使矩陣 (64) 表现一綫性有界映像，必須且只須諸数 a_k 及 b_k 为同一个与 k 无关的数 N 所界:

$$|a_k|\leqslant N; \quad |b_k|\leqslant N。 \tag{67}$$

在下面將作如此的假設。令

$$\psi_0, \psi_1, \psi_2, \cdots \tag{68}$$

是基本的坐标基組。用 A 表示与 (64) 的矩陣相应的自共轭运算子，可以写成

$$A\psi_k=b_{k-1}\psi_{k-1}+a_k\psi_k+b_k\psi_{k+1} \quad (k=0, 1, \cdots; \psi_{-1}=0)。 \tag{69}$$

如果取由关系 (65) 及 (66) 决定的多項式 $P_k(\lambda)$，那末应用上面的公式，可以用第一坐标基 ψ_0 表示任意坐标基 ψ_k 如下:

$$\psi_k=P_k(A)\psi_0。 \tag{70}$$

令 $\mathscr{E}_\lambda$ 是运算子 A 的譜函数，就是說是矩陣 (64) 的譜函数。由公式 (70) 直接可知諸元 $\mathscr{E}_\lambda\psi_0$ 組成整个 H。事实上，依 (70):

$$\psi_k=\int_a^b P_k(\lambda)d\mathscr{E}_\lambda\psi_0,$$

其中 a 及 b 是运算子(64)的界，就是說 ψ_k 是諸元 $\mathscr{E}_\lambda\psi_0$ 的一次組合式的極限，而凡元都可以依諸坐标基展开。如此，雅科比矩陣与簡單譜相应(譜不一定是連續的)，而第一坐标基矢 ψ_0 可以起基本元 x 的作用。依(70)可以写成：

$$(\psi_i,\ \psi_k)=(P_i(A)\psi_0,\ P_k(A)\psi_0)=(P_i(A)P_k(A)\psi_0,\ \psi_0),$$
$$(A\psi_i,\ \psi_k)=(AP_i(A)P_k(A)\psi_0,\ \psi_0),$$

而作函数

$$\rho(\lambda)=(\mathscr{E}_\lambda\psi_0,\ \psi_0)=\|\mathscr{E}_\lambda\psi_0\|^2, \tag{71}$$

依这些等式可以写出：

$$(\psi_i,\ \psi_k)=\int_a^b P_i(\lambda)P_k(\lambda)d\rho(\lambda)=\begin{cases}0 & \text{如果 } i\neq k,\\ 1 & \text{如果 } i=k,\end{cases}$$
$$(A\psi_i,\ \psi_k)=\int_a^b \lambda P_i(\lambda)P_k(\lambda)d\rho(\lambda),$$

由此直接可知諸多項式 $P_i(\lambda)$ 組成依 $\rho(\lambda)$ 的規格化正交組，而矩陣(64)的諸元依公式(60)由它們表示出来。如果函数 $\mathscr{E}_\lambda$ 有間断，那末如在上节中所看到的，凡如此的間断点与一秩等于 1 的固有值相应。由此看出函数 $\mathscr{E}_\lambda$ 不能簡化成有穷多个跃度，而关于 $\rho(\lambda)$ 也可以作同样的結論。反之，可以依公式(60)作任意雅科比矩陣，其中 $\rho(\lambda)$ 不必是連續的，而只是不能簡化成有穷多个跃度的不減函数。

141. 微分解 考察具有純連續譜的自共軛运算子(矩陣)。如以前所看到的，可以作一序列互相正交的規格化元 $y^{(s)}(s=1,2,\cdots)$，使 $\mathscr{E}_\lambda y^{(s)}$ 組成子空間 H_s，而这些子空間是互相正交的，其正交和是整个 H。諸元 $y^{(s)}$ 的数目是有穷或无穷的。令 $p_k^{(s)}(\lambda)(k=1,2,\cdots)$ 是元 $\mathscr{E}_\lambda y^{(s)}$ 的分量。函数 $p_k^{(s)}(\lambda)$ 是囿变函数，而当 s 屬于任意一个含于区間$[a,\ b]$之中的区間时，它們滿足方程

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\Delta p_k^{(s)}(\lambda)=\int_\Delta \lambda dp_i^{(s)}(\lambda)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots)。 \tag{72}$$

依[119]中的公式(188_1)及(188_2)，可以断言下面关于解$p_k^{(s)}(\lambda)$的正交性：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_1 p_k^{(s)}(\lambda)\cdot\overline{\Delta_2 p_k^{(t)}(\lambda)}=0 \tag{73}$$

($s\neq t$；区間Δ_1及Δ_2是任意的)，

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_1 p_k^{(s)}(\lambda)\cdot\overline{\Delta_2 p_k^{(s)}(\lambda)}=0 \tag{73$_1$}$$

(Δ_1及Δ_2无公共内点)。

由[117]的基本公式可以推出下面包含着微分解的作法的公式：

$$\sum_s\int_a^b \frac{d\overline{p_k^{(s)}(\lambda)}\,dp_i^{(s)}(\lambda)}{d\rho_s(\lambda)}=\begin{cases}0 & (k\neq i),\\ 1 & (k=i),\end{cases} \tag{74}$$

$$a_{ik}=\sum_s\int_a^b \lambda\frac{d\overline{p_k^{(s)}(\lambda)}\,dp_i^{(s)}(\lambda)}{d\rho_s(\lambda)}, \tag{75}$$

$$l_{ik}(\lambda)=\sum_s\int_a^\lambda \frac{d\overline{p_k^{(s)}(\mu)}\,dp_i^{(s)}(\mu)}{d\rho_s(\mu)}, \tag{76}$$

其中$l_{ik}(\lambda)$是譜矩陣的元。如果以某种方式作出满足正交条件(73)及(73_1)的解組(72)，并証明了公式(76)对任意λ成立，那末我們可以肯定所得的解組是完全的，并且其余公式都成立。令$y(y_1, y_2, \cdots)$及$z(z_1, z_2, \cdots)$是l_2中的解，而

$$y^{(s)}(\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty} y_k\overline{p_k^{(s)}(\lambda)};\quad z^{(s)}(\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty} z_k\overline{p_k^{(s)}(\lambda)},$$

[117]中的公式(182_3)可以写成下面形式：

$$(Ay, z)=\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}y_k\bar{z}_i=\sum_s\int_a^b \lambda\frac{dy^{(s)}(\lambda)\,d\overline{z^{(s)}(\lambda)}}{d\rho_s(\lambda)}。\tag{76$_1$}$$

这是(75)的直接推論。同样也可以写出[117]中的其余公式。不难証明，如果某微分解$v_k(\lambda)$ $(k=1, 2, \cdots)$与上面所述的一切微分解正交，而后面諸解組成微分解的完全組，那末一切$v_k(\lambda)$是常数。常数$v_k(\lambda)$的情形是組(72)的寻常解，因为这时$\Delta v_k(\lambda)=0$而$dv_k(\lambda)=0$。在排去点譜之后所得的微分解$p_k^{(s)}(\lambda)$与运算子A

的一切固有元正交。回到組(72)，并令 $p_k(\lambda)$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$ 是这組的某一微分解：

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\Delta p_k(\lambda) = \int_{\Delta} \lambda dp_i(\lambda) \quad (i=1, 2, \cdots)。$$

設一切函数 $p_k(\lambda)$ 有連續导函数 $p_k'(\lambda)$。这时上面那些斯提勒杰斯积分都变成連續函数的平常积分，而把中値定理应用于其上，并用 λ' 及 λ'' 表示区間 Δ 的端点，可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}[p_k(\lambda'') - p_k(\lambda')] = \lambda_i p_i'(\lambda_i)(\lambda'' - \lambda'), \tag{77}$$

其中 $\lambda'<\lambda_i<\lambda''$。应用拉格朗日公式于左边，把两边除以 $(\lambda''-\lambda')$，并令 λ' 及 λ'' 趋向于公共極限値，可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}p_k'(\lambda) = \lambda p_i'(\lambda) \quad (i=1, 2, \cdots)。\tag{78}$$

这时設在(77)左边的无穷和中可以逐項取極限。如果这和是有穷的，那末这毫无問題，也就是說矩陣 a_{ik} 在其每行及每列中只有有穷多个不等于零的元。由公式(78)可以看出在所述条件下，就連續譜的情形說，$p_k'(\lambda)$ $(k=1, 2, \cdots)$ 对于任意 λ 都滿足关于固有元([138]中的(34))的方程，但 $p_k'(\lambda)$ 不屬于 l_2，就是說，由 $|p_k'(\lambda)|^2$ 組成的和等于 $+\infty$，因为在純連續譜的情形不存在固有元。在有混合譜的情形下，微分解可能与 l_2 中給出固有元的平常解相合。

142. 全連續映像的矩陣　設有一序列元 $x^{(n)}$，其分量是 $x_s^{(n)}$ $(s=1, 2, \cdots)$，这序列强收斂于元 x，而元 x 的分量是 x_s $(s=1, 2, \cdots)$，就是說 $\|x-x^{(n)}\|^2\to 0$。我們可把这写成

$$\sum_{s=1}^{\infty} |x_s - x_s^{(n)}|^2 \to 0。\tag{79}$$

由此，如在[94]中所知，可得

$$\sum_{s=1}^{\infty} |x_s^{(n)}|^2 \to \sum_{s=1}^{\infty} |x_s|^2, \tag{80}$$

而諸元 $x^{(n)}$ 的范数由一个与 n 无关的数所界。由(79)直接可知对

于任意 s 滿足下列条件：

$$x_s^{(n)} \to x_s \quad (s=1, 2, \cdots)。 \tag{81}$$

但从这一条件并不能得出条件(79)来①。我們証明条件(81)以及諸元范数的有界性：

$$\sum_{s=1}^{\infty} |x_s^{(n)}|^2 \leqslant l^2, \tag{82}$$

合起来与序列 $x^{(n)}$ 弱收斂于 x 是同效的。事实上，弱收斂与下面命题同效[127]：在条件(82)之下，对于任意元 z，$(x^{(n)}, z) \to (x, z)$，就是說

$$\sum_{s=1}^{\infty} x_s^{(n)} \bar{z}_s \to \sum_{s=1}^{\infty} x_s \bar{z}_s。 \tag{83}$$

但我們知道，对于最后条件只須就坐标基来驗明，就是說，只就仅有一个 z_s 等于 1 而其余都是零的情形来驗明[127]。这时由(83)也可以直接得到(81)。如此条件(81)及(82)与 $x^{(n)}$ 弱收斂于 x 同效。現在証明一定理，这乃是关于一預定的矩陣是相应于全連續映像的充分条件。

定理 5. 如果二重級数

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 \tag{84}$$

收斂，那末矩陣 a_{ik} 与全連續映像相应。

首先注意，在級数(84)收斂的条件下，綫性映像的有界性由下面不等式得出：

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 \cdot \sum_{s=1}^{\infty} |x_s|^2 \right] \leqslant k^2 \sum_{s=1}^{\infty} |x_s|^2,$$

其中 k^2 表示級数(84)的和。为了得出上写的不等式，只須对于左边的内和应用舒伐尔茲不等式。应当証明在級数(84)收斂的条件下，与矩陣 a_{ik} 相应的映像 A 是全連續的，就是說，如果 $x^{(n)} \to x$，那

① 譯者注：令 $x_s^{(n)}=1$ 如果 $n=s$，而 $x_s^{(n)}=0$ 如果 $n \neq s$，那末 $x_s^{(n)} \to 0 (s=1, 2, \cdots)$，但 $\sum_{s=1}^{\infty} |0-x_s^{(n)}|^2 = 1$ 不 $\to 0$。

末 $Ax^{(n)}\Rightarrow Ax$。把 $x^{(n)}$ 换成差 $x^{(n)}-x$，可以把定理的証明簡化成証明下面的命題：如果 $x^{(n)}\rightarrow 0$，那末 $Ax^{(n)}\Rightarrow 0$，就是說，如果条件(84)滿足，$|x^{(n)}|\leqslant l$ 而对于一切 s

$$x_s^{(n)}\rightarrow 0 \quad (s=1, 2, \cdots), \tag{85}$$

那末应当証明

$$S_n=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k^{(n)}\right|^2 \rightarrow 0。 \tag{86}$$

分內部的和为两个，并应用不等式 $|a+b|^2\leqslant 2|a|^2+2|b|^2$，可得

$$S_n\leqslant 2\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{N} a_{ik} x_k^{(n)}\right|^2+2\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{k=N+1}^{\infty} a_{ik} x_k^{(n)}\right|^2。$$

在第一項中把依 i 的和分解成两个：

$$S_n\leqslant 2\sum_{i=1}^{N}\left|\sum_{k=1}^{N} a_{ik} x_k^{(n)}\right|^2+2\sum_{i=N+1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{N} a_{ik} x_k^{(n)}\right|^2+$$

$$+2\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{k=N+1}^{\infty} a_{ik} x_k^{(n)}\right|^2。$$

应用舒伐尔兹不等式，并应用条件(82)，可以写成

$$S_n\leqslant 2\sum_{i=1}^{N}\left|\sum_{k=1}^{N} a_{ik} x_k^{(n)}\right|^2+$$

$$+2l^2\left[\sum_{i=N+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N}|a_{ik}|^2+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=N+1}^{\infty}|a_{ik}|^2\right]。$$

依級数(84)的收斂，对于任意已知的正数 ε 可以固定一足够大的 N，使方括号中的和 $\leqslant\varepsilon$：

$$S_n\leqslant 2\sum_{i=1}^{N}\left|\sum_{k=1}^{N} a_{ik} x_k^{(n)}\right|^2+2l^2\varepsilon。$$

留意(85)，可知对于一切足够大的 n 值，右边第一項 $\leqslant\varepsilon$，而如此

$$S_n\leqslant\varepsilon(1+2l^2),$$

既然 ε 是任意的，由此可得(86)，于是定理証明了。

級数(84)的收斂只是矩陣 a_{ik} 所表現的映像为全連續的充分条件。可以証明必要且充分的条件乃是：如果 x 及 y 的范数不超

过1，那末在公式(14)中的極限步驟是依 x 及 y 两元一致的收斂。如果矩陣变成純粹对角綫式的，那末在其主对角綫上的乃是它的固有值，而依[125]中的定理，映像有全連續性的必要且充分的条件乃是其諸对角元依原來順序趋向于零。

留意在[126]中証明过的关于全連續映像的定理，对于自共轭全連續矩陣可以重复具有对称核的积分方程的弗列德和蒙理論，用之于无穷方程組

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k = \lambda x_i + f_i \quad (i=1, 2, \cdots) \tag{87}$$

上，其中 $(f_1, f_2, \cdots)$ 是已知的，而 $(x_1, x_2, \cdots)$ 是 l_2 中的未知元。只須注意参数 λ 在方程(87)中的位置与它在以前所写的积分方程中的位置不同。

143. 例 1. 在区間$[-1, +1]$中，令

$$\rho(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{\lambda} \sqrt{1-\lambda^2}\,d\lambda。$$

关于多項式 $P_i(\lambda)$ 的条件(59)可以写成下面形式：

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\lambda^2}P_i(\lambda)P_k(\lambda)\,d\lambda = \begin{cases} 0 & 如果\ i \neq k, \\ 1 & 如果\ i = k。\end{cases} \tag{88}$$

不难証明，下面諸多項式满足这条件：

$$P_n(\lambda) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \quad 其中 \quad \cos\theta = \lambda。$$

使用穆阿弗尔公式，很容易地証明，上面写的分式是 $\cos\theta$ 的 n 次多項式。如果换 λ 成新变数，令 $\lambda = \cos\theta$，条件(88)直接可以驗証。矩陣(64)中的数 a_k 及 b_k 由下面公式定义：

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} \lambda\sqrt{1-\lambda^2}P_k^2(\lambda)\,d\lambda; \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} \lambda\sqrt{1-\lambda^2}P_k(\lambda)P_{k+1}(\lambda)\,d\lambda。$$

取变数 θ，并計算所得的諸积分，对于任意 k，可知 $a_k=0$，$b_k=\frac{1}{2}$，就是說，相应矩陣的元由公式 $a_{k,k+1}=a_{k+1,k}=\frac{1}{2}$ 定义，而其他的 $a_{ik}=0$。这矩陣有簡單純連續譜。依(50)，这組的唯一微分解由下面公式决定：

$$p_n(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{\lambda} \sqrt{1-\lambda^2}P_{n-1}(\lambda)\,d\lambda = -\frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{\theta} \sin\theta\sin n\theta\,d\theta,$$

由此 $p_n'(\lambda)=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-\lambda^2}P_{n-1}(\lambda)=\frac{2}{\pi}\sin n\theta$。去掉因子 $\frac{2}{\pi}$，可以看出組(34)

$$\frac{1}{2}x_2=\lambda x_1;\ \frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_3=\lambda x_2;\ \cdots;\ \frac{1}{2}x_{n-1}+\frac{1}{2}x_{n+1}=\lambda x_n;\cdots$$

有解 $x_n=\sin(n\arccos\lambda)$，其中 $-1\leqslant\lambda\leqslant+1$。

2．考察在區間 $[-\pi,+\pi]$ 上閉規格化正交組 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik\pi}$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$。当 $\rho(\lambda)=\lambda$ 时公式(51)給出下列关于相应矩陣的元：$a_{pq}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\lambda e^{i(p-q)\lambda}\,d\lambda=\frac{(-1)^{p-q}}{i(p-q)}$，如果 $p\neq q$，而 $a_{pp}=0$，其中 p 及 q 均由 $-\infty$ 到 $+\infty$。依(50)，

$$p_k(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\lambda}e^{-ik\lambda}d\lambda;\quad p_k'(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ik\lambda},$$

而由公式(78)可得等式

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{(-1)^{s-k}}{i(s-k)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ik\lambda}=\lambda\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-is\lambda},$$

其中和号上的一撇表明在和中除掉 $k=s$ 那一項。上面公式可以改写成下面形式：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{(-1)^{s-k}}{i(s-k)}e^{i(s-k)\lambda}=\lambda,$$

也就是

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}{}'\frac{(-1)^{j}}{ij}e^{ij\lambda}=\lambda,$$

其中除去值 $j=0$。最后公式正是展开 λ 成傅立叶級数的平常展开式，其中所写的級数在区間的端点——就是 $\lambda=\pm\pi$，是發散的。上面結論的得出，是由于把展开式写成复变数形式。現在应用公式(56)，令 $\lambda<0$ 时 $f(\lambda)=-\pi-\lambda$，当 $\lambda>0$ 时 $f(\lambda)=\pi-\lambda$。如此得出矩陣

$$b_{pq}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\pi-\lambda)e^{i(p-q)\lambda}d\lambda+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-\lambda)e^{i(p-q)\lambda}d\lambda,$$

或即

$$b_{pq}=\frac{i}{p-q}\quad\text{如果 } p\neq q\text{，而 } b_{pp}=0。\tag{89}$$

留意在区間 $[-\pi,+\pi]$ 中 $|f(\lambda)|\leqslant\pi$，对于二次式[123]可得下面的估值：

$$\left|\sum_{p,q=-s}^{+s}{}'\frac{x_p\bar{x}_q}{p-q}i\right|\leqslant\pi\sum_{k=-s}^{s}|x_k|^2。\tag{90}$$

在这估值中，左边的因子 i 显然是可以去掉的。如果当 $p\leqslant0$ 时令 $x_p=0$，而令其他 x_p 是实数，可得下面的估值，这是由希勒柏特給出的：

$$\left|\sum_{p,q=1}^{n}{}' \frac{x_p x_q}{p-q}\right| \leqslant \pi \sum_{k=1}^{n} x_k^2。\tag{91}$$

不難証明，如果当 $p \neq q$ 时 $a'_{pq}=1:|p-q|$，而 $a_{pp}=0$，則矩陣 a_{pq} 不与有界运算子相应。事实上，如果令 $1 \leqslant k \leqslant n$ 时的 $x_k=1:\sqrt{n}$，而 $k>n$ 时的 $x_k==0$，那末元 $(x_1, x_2, x_3, \cdots)$ 的范数等于1，而相应的二次式是

$$\sum_{p,q=1}^{n} \frac{x_p x_q}{|p-q|} = \frac{2}{n} \sum_{q<p}^{1,2,\cdots,n} \frac{1}{p-q} = \frac{2}{n} \sum_{p=2}^{n} \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-2}+\frac{2}{p-1}\right)=$$

$$=\frac{2}{n}\left(\frac{n-1}{1}+\frac{n-2}{2}+\cdots+\frac{n-(n-1)}{n-1}\right)=2\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{n-1}{n}\right);$$

当 n 增大时最后式无限地增大，因为和 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$ 无限地發散，而分式 $\frac{n-1}{n}$ 趋向于1。在情形(89)中无穷的二重級数不絕对收敛，但可以結論，对于 l_2 中任意两元，極限

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n}{}' \frac{x_p \bar{y}_q}{p-q} i = \sum_{q=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{x_p}{p-q} i\right] \bar{y}_q$$

存在，而在内部依 p 的和中除掉 $p=q$，在左边除去 $p=q$ 的項。

3. 現在代替組 $e^{ik\lambda}$ 而考察实閉規格化正交組

$$\varphi_k(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sin k\lambda+\cos k\lambda) \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots).$$

应用公式(56)，可得矩陣

$$b_{pq}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\lambda)\,(\sin p\lambda+\cos p\lambda)\,(\sin q\lambda+\cos q\lambda)\,d\lambda$$

即
$$b_{pq}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\lambda)\cos(p-q)\lambda d\lambda+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\lambda)\sin(p+q)\lambda d\lambda。$$

与以前一样，当 $\lambda<0$ 时令 $f(\lambda)=-\pi-\lambda$，而当 $\lambda>0$ 时令 $f(\lambda)=\pi-\lambda$，可得下面矩陣：

$$b_{pq}=\frac{1}{p+q} \quad \text{如果 } p+q \neq 0,\ \text{而 } b_{pq}=0 \text{ 如果 } p+q=0。$$

与不等式(90)相似，可得下面不等式：

$$\left|\sum_{p,q=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{x_p \bar{x}_q}{p+q}\right| \leqslant \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2, \tag{92}$$

其中一撇表示在和中必須取消使 $p+q=0$ 的諸項。不等式(92)与下面不等式相应：

$$\left|\sum_{p,q=1}^{n} \frac{x_p x_q}{p+q}\right| \leqslant \pi \sum_{k=1}^{n} x_k^2。\tag{93}$$

一切数都可以設是正的，而所写的二重級数对于 l_2 中的任意元是絕对收斂的，于是可以写成：

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{x_p x_q}{p+q} \leqslant \pi \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2。 \tag{94}$$

4. 取一例闡明一与有界映像相应的无穷矩陣可以有无穷多有界的單側逆，而在另一側根本沒有有界逆矩陣。令 $a_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots)$ 是实数，其絕对值的和是收斂級数。如果令

$$A=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix}; \quad B=\begin{Vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix},$$

那末应用[136]中的定理 2 不难証明 A 与 B 与有界运算子相应，而对于任意选擇的 a_k，矩陣 B 是 A 的左側逆，就是說 $BA=E$。如果取共軛矩陣，就是說既然 a_k 是实的，只須取轉置矩陣 A' 及 B'，那末对于任意 a_k，$A'B'=E$。方程 $Ax=y$ 的形式是：$x_1=y_2$；$x_2=y_3$；$\cdots$，而它在 l_2 中有唯一解 $x_k=y_{k+1}\ (k=1,\ 2,\ \cdots)$。方程 $A'x=y$ 的形式是 $x_2=y_1$；$x_3=y_2$；$\cdots$，而既然 x_1 是任意的，它有无穷多解。

144. 空間 L_2　現在回到在有穷或无穷区間上可測并且平方可和的函数所組成的空間。这时积分可以了解成勒貝格的，也可以了解成勒貝格-斯提勒杰斯的。为确定起見考察勒貝格积分，并限于一变数的情形。所得一切結果都不难推广到多变数的情形上去。我們記得，如果 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)\in L_2$，那末它們的数积由公式

$$(f_1,\ f_2)=\int_a^b f_1(x)\overline{f_2(x)}dx \tag{95}$$

定义，而元的范数由下面公式定义：

$$\|f_1\|^2=\int_a^b |f_1(x)|^2dx。 \tag{96}$$

有一类 L_2 上很重要的綫性运算子，乃是积分运算子

$$\varphi(x)=\int_a^b K(x,\ y)f(y)dy. \tag{97}$$

但并非 L_2 中一切綫性有界运算子都能由 (97) 表示。例如不变映像运算子就不能表示成积分形式①。

在考察积分运算子之前，首先关于两变数函数作一些簡單按語。設在有穷区間 $\Delta[a\leqslant x\leqslant b;\ c\leqslant y\leqslant d]$ 中，在每一平行于 X 軸的綫段 $a\leqslant x\leqslant b$ 上有同一可测点集合 $\mathscr{E}$，其一維测度是 $m(\mathscr{E})$。所有这些点集合 $\mathscr{E}$ 組成 Δ 中的一个点集合 $\mathscr{E}'$。依 [70] 中的定理可知 $\mathscr{E}'$ 是（在二維的意义下）可测集合，而其测度等于 $m(\mathscr{E})(d-c)$。由此直接可知如果 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可测，那末如果把它看做在 Δ 中的二变数函数，它仍是可测的。无限地扩張 Δ，可以把上述一切扩展到无穷区間的情形。

回来考察积分(97)。設 $K(x,y)$ 是区間 $\Delta_0(a\leqslant x\leqslant b;\ a\leqslant y\leqslant b)$ 中可测的函数，因此它对于几乎一切 x 值都是 y 的可测函数，对于几乎一切 y 值都是 x 的可测函数。再設对于几乎一切 x 值，它依 y 是屬于 L_2 的函数，对于几乎一切 y 值，它依 x 是屬于 L_2 的函数，就是說：

$$K^2(x)=\int_a^b|K(x,y)|^2dy<+\infty;\tag{98$_1$}$$

$$K_1^2(y)=\int_a^b|K(x,y)|^2dx<+\infty,\tag{98$_2$}$$

而 $K(x)$ 及 $K_1(y)$ 是可测的非負函数[70]。由 (98_1) 可知对于任意屬于 L_2 的 $f(y)$，积分(97)存在，而对于 $[a, b]$ 中几乎一切 x 值定义的函数 $\varphi(x)$ 是可测函数。为了在条件 (98) 之下，映像 (97) 是綫性有界映像，必須且只須下面条件滿足：无論怎样选擇 L_2 中的 $f(x)$，及 $\varphi(x)\in L_2$，必存在一正数 N，使

$$\int_a^b|\varphi(x)|^2dx=\int_a^b\left|\int_a^b K(x,y)f(y)dy\right|^2dx\leqslant N^2\int_a^b|f(y)|^2dy。\tag{99}$$

滿足上面条件的数 N 的下确界就是运算子(97)的范数。

① 譯者注：由 [53] 中 11. 易明。

現在举出与核 $K(x, y)$ 相应的运算子有界的充分条件，与矩陣有界的条件 (27_1) 及 (27_2) 相似：存在一正数 l，使

$$\int_a^b |K(x, y)|dy \leqslant l, \quad \int_a^b |K(x, y)|dx \leqslant l。 \qquad (100)$$

只須証明相应双綫性泛函是有界的。在表現这泛函的累次积分中，把一切函数换成其絕对值，可以把累次积分换成二重积分：

$$\int_a^b\int_a^b |K(x, y)||f_1(y)||f_2(x)|dxdy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b |K(x, y)|[|f_1(y)|^2 + |f_2(x)|^2]dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b\left[\int_a^b |K(x, y)|dx\right]|f_1(y)|^2dy +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_a^b\left[\int_a^b |K(x, y)|dy\right]|f_2(x)|^2dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{l}{2}\left[\int_a^b |f_1(y)|^2 dy + \int_a^b |f_2(x)|^2dx\right]。$$

但最后一式等于 l，如果 $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$。用完全同样的証明法可以得出关于运算子(97)为有界性的較条件 (100) 更一般的充分条件，这条件就是：存在一正数 l 及一在 $[a, b]$ 中正的連續函数 $\omega(x)$，使

$$\int_a^b |K(x, y)|\omega(y)dy \leqslant l\omega(x); \quad \int_a^b |K(x, y)|\omega(x)dx \leqslant l\omega(y)。 \qquad (101)$$

145. 共軛运算子 在有界运算子的情形中，如果非負函数 $K(x)$ 由公式 (98_1) 定义，积分

$$\int_a^b K(x)\tau(x)dx \qquad (102)$$

可能对 L_2 中的某些 $\tau(x)$ 沒有意义。凡 L_2 中能使上面积分有意义的函数 $\tau(x)$ 的集合显然是 L_2 中的一个綫性簇 l。

定理 6. 綫性簇 l 在 L_2 中到处稠密。

必須証明，l 的閉包是整个 L_2。如果不然，那末会存在 L_2 中一个非零元 $\pi(x)$，与 l 的閉包中一切元正交，于是与 l 中一切元正交。如此，只須証明如果 $\pi(x)=\pi_1(x)+i\pi_2(x)$ 与 l 中一切 $\tau(x)$ 正交，就是說

$$\int_a^b \tau(x)\overline{\pi(x)}dx=0, \tag{103}$$

那末 $\pi(x)$ 与 0 相抵。以一特殊方式取 l 中的 $\tau(x)$。設 m 是某一有穷正数，e_m 是使 $K(x)\leqslant m$ 的那些 x 所成的集合，e_m' 是 e_m 中測度 $\leqslant m$ 的任意部分。定义 $\tau(x)$，使当 $x\in e_m'$ 时 $\tau(x)=1$，对于其他 x，$\tau(x)=0$。如此的 $\tau(x)$ 屬于 l，而应用(103)，可得

$$\int_{e_m'}\overline{\pi(x)}dx=\int_{e_m'}[\pi_1(x)-i\pi_2(x)]dx=0。 \tag{104}$$

这等式对于 e_m' 的任意部分也必正确，因此

$$\int_{e_m'}\pi_1^+(x)dx=0, \tag{105}$$

而 $\pi_1^+(x)$ 是 $\pi_1(x)$ 的正部分，就是說 $\pi_1^+(x)$ 在 e_m' 上必与零相抵。无限地增大 m，并留意 (98_1)，可知 $\pi_1^+(x)$ 在 $[a, b]$ 上与零相抵。同样可証 $\pi_1^-(x)$，$\pi_2^+(x)$，及 $\pi_2^-(x)$ 也在 $[a, b]$ 上与零相抵，于是輔助定理証明了。留意在証明这輔助定理时只应用了 $K(x)$ 的下面几个性質：$K(x)$是任意非負的，在$[a, b]$上几乎到处取有穷值，并且是可測的函数。下面将用 l_1 表示与乘积 $K_1(x)\tau(x)$相应的同样綫性簇。它也是在 L_2 中到处稠密的。

定理 7. 如果公式(97)定义一个有界运算子，那末其共軛运算子是积分运算子，其核是

$$K^*(x, y)=\overline{K(y, x)}。 \tag{106}$$

用 A 表示运算子(97)，并留意共軛运算子的定义：$(Ax, y)=(x, A^*y)$，可以写成

$$\int_a^b\left[\int_a^b K(x, y)\tau(y)dy\right]\overline{g(x)}dx=\int_a^b \tau(y)\overline{g^*(y)}dy, \quad (107)$$

而 $g^*(x)=A^*g(x)$，并且我們設 $\tau(y)\in l_1$。留意不等式

$$\int_a^b |K(x, y)\overline{g(x)}|dx\leqslant\left(\int_a^b |K(x, y)|^2dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_a^b |g(x)|^2dx\right)^{1/2}=$$

$$=K_1(y)\cdot\|g\|,$$

以及 $\tau(x)\in l_1$ 这一事实，可知 $|K(x, y)\overline{g(x)}\tau(y)|$ 的累次积分必存在，所以在(107)左边的积分中可以改变积分次序，从而把公式(107)改写成下面形式：

$$\int_a^b \tau(y)\left[\int_a^b K(x, y)\overline{g(x)}dx-\overline{g^*(y)}\right]dy=0。$$

重复定理 6 的証明可知在方括弧中的差与零相抵，所以取其共軛量，可知

$$g^*(y)=\int_a^b \overline{K(x, y)}g(x)dx, \quad (108)$$

由此可得定理的結論。依所証的定理，等式 $(Ax, y)=(x, A^*y)$ 对于积分运算子可以写成下面形式：

$$\int_a^b\left[\int_a^b K(x, y)f(y)dy\right]\overline{g(x)}dx=$$

$$=\int_a^b\left[\int_a^b K(x, y)\overline{g(x)}dx\right]f(y)dy, \quad (109)$$

这正是說明积分次序顛倒的可能性。相应重积分可以不存在。如果除上述条件外核还滿足条件

$$K(x, y)=\overline{K(y, x)}, \quad (110)$$

那末运算子(108)与运算子(97)重合，就是說运算子(97)是自共軛的。注意在这情形下条件(100)变成了一个条件。在下面主要是考察自共軛运算子。

146. 全連續映像 設 $K(x, y)$ 是与有界运算子相应的核。如果取某一閉規格化正交組 $\omega_j(x)$ $(j=1, 2, 3, \cdots)$，那末凡 L_2 中的函数由它依諸 $\omega_j(x)$ 的傅立叶級数完全决定，于是代替 L_2 得出

了 l_2，而积分运算子(97)换成某一无穷矩陣。我們且演出相应的計算。取 $\overline{K(x, y)}$ 依第二主变数的傅立叶系数及函数 $f(x)$ 的傅立叶系数：

$$k_j(x)=\int_a^b \overline{K(x, y)}\cdot\overline{\omega_j(y)}\,dy;\quad f_j=\int_a^b f(x)\overline{\omega_j(x)}\,dx, \qquad (111)$$

那末 $k_j(x)\in L_2$，因为依条件运算子(97)把凡 L_2 中的函数仍变換成 L_2 中的函数。依广义閉性方程，方程(97)換成同效方程

$$\varphi(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\overline{k_j(x)}f_j。\qquad (112)$$

設 $S_n(x)$ 是函数 $f(x)$ 的傅立叶級数的部分和，就是說：

$$S_n(x)=\sum_{j=1}^{n}f_j\omega_j(x),$$

而設

$$\varphi_n(x)=\int_a^b K(x, y)S_n(y)\,dy。$$

那末 $S_n(x)\Rightarrow f(x)$，而依有界性，映像(97)是連續的，所以 $\varphi_n(x)\Rightarrow\varphi(x)$。关于 $\varphi_n(x)$，等式(112)可以改写成下面形式：

$$\varphi_n(x)=\sum_{j=1}^{n}\overline{k_j(x)}f_j,$$

而应用下面記号

$$a_{ij}=\int_a^b\overline{k_j(x)}\,\overline{\omega_i(x)}\,dx, \qquad (113)$$

可得函数 $\varphi_n(x)$ 的傅立叶系数：

$$C_i^{(n)}=\int_a^b\varphi_n(x)\overline{\omega_i(x)}\,dx=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j。$$

依 $\varphi_n(x)\Rightarrow\varphi(x)$ 及数积的連續性，可得函数 $\varphi(x)$ 的傅立叶系数：

$$C_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}f_j\quad(i=1, 2, 3, \cdots)。\qquad (114)$$

这公式把积分运算子(97)表現成无穷矩陣 $\|a_{ij}\|$ 的形式。

把上面的一般叙述应用到一个特殊情形，这就是，設 $K(x, y)$ 屬于 Δ_0 上的 L_2，就是說

$$\int_a^b\int_a^b |K(x, y)|^2 dxdy < +\infty, \tag{115}$$

我們証明在这情形中矩陣 $\|a_{ij}\|$ 滿足条件

$$\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \int_a^b\int_a^b |K(x, y)|^2 dxdy < +\infty, \tag{116}$$

就是說，映像(114)是全連續的，因此映像(97)也有同样性質。事实上，依(111)中的第一式及閉性方程：

$$\sum_{j=1}^{\infty} |k_j(x)|^2 = \int_a^b |K(x, y)|^2 dy。$$

由条件(115)可知右边的 x 的函数在$[a, b]$上可和，而依[55]的定理3，可以在积分号下取極限，就是說可以把級数逐項积分，因此

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_a^b |k_j(x)|^2 dx = \int_a^b \left[\int_a^b |K(x, y)|^2 dy\right] dx = l。\tag{117}$$

另一方面，依(113)及閉性方程，

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 = \int_a^b |k_j(x)|^2 dx,$$

于是由(117)可得等式(116)。再应注意，条件(115)也能保証映像(97)是有界映像。事实上，依舒伐尔兹不等式，

$$|\varphi(x)|^2 \leqslant \int_a^b |K(x, y)|^2 dy \cdot \int_a^b |f(y)|^2 dy,$$

于是

$$\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx \leqslant l\|f\|^2。$$

如果积分运算子(97)是全連續的，那末关于自共軛核，[126]的基本定理成立。如果取齐次方程

$$\int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = \lambda\varphi(x), \tag{118}$$

其中参数的地位与积分方程論中通常的写法不同，那末譜是純点的，而 $\lambda=0$ 是譜的唯一可能的凝点，并且是唯一可能的无穷秩固有值。凡由核

$$g(x)=\int_a^b K(x, y)h(y)dy \tag{119}$$

表現的函数，其中 $h(y)\in L_2$，依方程(118)与諸固有值 $\lambda_j\neq 0$ 相应的諸固有函数展开成傅立叶級数. 而这級数的收斂应当了解成依中値收斂。如果 h_j 是函数 $h(x)$ 依方程(118)的諸固有函数 $\varphi_j(x)$ 的傅立叶系数，那末依公式(119)定义的函数 $g(x)$ 的傅立叶系数等于 $\lambda_j h_j$。考察非齐次方程

$$\int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy=\lambda\varphi(x)+f(x), \tag{120}$$

如果 $\lambda\neq 0$，并且不与任何 λ_j 相合，則 [IV; 46]

$$\varphi(x)=-\frac{1}{\lambda}f(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_j f_j}{\lambda(\lambda_j-\lambda)}\varphi_j(x), \tag{121}$$

其中 f_j 是 $f(x)$ 的傅立叶系数，而級数的收斂应当了解成依中値收斂。如果 $\lambda\neq 0$，而与一个固有値相等，那末(120)可解的必要且充分的条件乃是 $f(x)$ 与一切相应固有函数正交。核的双綫性式是做下面形式：

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)},$$

而它在 L_2 中依中値收斂于核。凡这些結論都是古典理論的重述。可以証明，在条件(115)滿足之下，可以重述弗列德和蒙的全套方法，以把豫解式表成两个 λ 的整函数的商，但我們在此不詳述了。在如此做时只是可能要改变核 $K(x, y)$ 在对角綫 $y=x$ 上的值，以使函数 $K(x, x)$ 是可和的。关于这命题的証明可以参看卡尔勒曼 (Mathem. Zeitschr. 卷 9, 1921)，希勒及塔馬尔金 (Acta. Math. 卷 57) 及 C. Г. 米赫林 (苏联科学院报告，卷 42, 1944, 第九期) 的著作。如果条件(115)滿足，那末可以証明由核 $K(x,y)$ 表現的运算子的絕对范数的平方等于积分 (115)。首先証明輔助定理。

輔助定理 如果 $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 是区間 $[a, b]$ 上的完

全規格化正交組，那末 $\psi_{m,n}(x, y)=\varphi_m(x)\overline{\varphi_n(y)}(m, n=1,2,3,\cdots)$ 是区間 $\Delta_0(a\leqslant x\leqslant b; a\leqslant y\leqslant b)$ 上的完全規格化正交組。

依条件，

$$\int_a^b \varphi_m(x)\overline{\varphi_n(x)}dx=\delta_{m,n}\ (\text{当 } m\neq n \text{ 时 } \delta_{m,n}=0;\ \delta_{m,m}=1)。$$

函数 $\psi_{m,n}$ 显然屬于 Δ_0 上的 L_2，依傅必尼定理，

$$\iint_{\Delta_0} \psi_{m,n}\overline{\psi_{p,q}}dxdy=\int_a^b \varphi_m(x)\overline{\varphi_p(x)}dx\cdot\int_a^b\overline{\varphi_n(y)}\varphi_q(y)dy,$$

由此可知 $\psi_{m,n}$ 形成一規格化正交組。为了証明完全性，只須証明如果 $f(x, y)\in L_2$，而与一切 $\psi_{m,n}$ 正交，那末它在 Δ_0 上与零相抵[59]。設

$$\iint_{\Delta_0} f(x, y)\overline{\varphi_m(x)}\varphi_n(y)dx\,dy=0,$$

就是説

$$\int_a^b\left[\int_a^b f(x, y)\varphi_n(y)dy\right]\overline{\varphi_m(x)}dx=0,$$

而依組 $\varphi_m(x)$ 的閉性，幷取共軛量，可知

$$\int_a^b\overline{f(x, y)}\overline{\varphi_n(y)}dy=0 \text{ 对于 } [a, b] \text{ 上的 } x \text{ 殆遍成立},$$

而既然組 $\varphi_n(y)$ 是閉的，可知 $f(x, y)=0$ 在 Δ_0 殆遍成立，于是輔助定理証明了。設 b_{mn} 是依(115)屬于 Δ_0 上的 L_2 中的核 $K(x,y)$ 的傅立叶系数：

$$b_{mn}=\iint_{\Delta_0} K(x, y)\overline{\varphi_m(x)}\varphi_n(y)dxdy。$$

我們来确定运算子 A 的絕对范数的平方，而 A 是与这核相应的[128]：

$$\begin{aligned}N^2(A)&=\sum_{m,n}|(A\varphi_n, \varphi_m)|^2=\\&=\sum_{m,n}\left|\int_a^b\left[\int_a^b K(x, y)\varphi_n(y)dy\right]\overline{\varphi_m(x)}dx\right|^2=\\&=\sum_{m,n}\left|\iint_{\Delta_0}K(x, y)\overline{\varphi_m(x)}\varphi_n(y)dxdy\right|^2=\sum_{m,n}|b_{m,n}|^2,\end{aligned}$$

但最后的和依閉性方程等于积分 (115)。留意 [128] 中的公式 (255)，可得：

$$\iint_{\Delta_0}|K(x, y)|^2 dxdy=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^2。\qquad (122)$$

147. 譜函数 用K表示(97)左边的全連續运算子。現在对于这运算子作譜函数$\mathscr{E}_\lambda$及豫解式$R_l=(K-lE)^{-1}$。不用$\mathscr{E}_\lambda$，我們引用另外的函数，以便把它表現成积分运算子的形式，就是說，設

$$当\ \lambda<0\ 时\ \theta_\lambda=\mathscr{E}_\lambda，当\ \lambda>0\ 时\ \theta_\lambda=\mathscr{E}_\lambda-E，而\ \theta_0=0。\qquad (123)$$

留意譜是純点的，可知$\mathscr{E}_\lambda$是在凡与$\lambda_k\leqslant\lambda$相应的固有函数$\varphi_k(x)$所組成的子空間中的投影运算子。函数$f(x)$在固有函数$\varphi_k(x)$所生成的一維子空間中的投影可以表成乘积$a_k\varphi_k(x)$的形式，其中$a_k$是$f(x)$的傅立叶系数：

$$a_k\varphi_k(x)=\int_a^b\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}f(y)\,dy。$$

如此在上述一維子空間中的投影运算子是积分运算子，其核是$\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}$，我們可以写成：当$\lambda<0$时

$$\theta_\lambda f(x)=\int_a^b\sum_{\lambda_k\leqslant\lambda}\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}f(y)\,dy,$$

其中和是就合乎$\lambda_k\leqslant\lambda$的那些$k$值来取的，而依全連續运算子的譜的性質可知上面的和只包括有穷多項。如此当$\lambda<0$时运算子θ_λ是积分运算子，其核是

$$\theta(x, y; \lambda)=\sum_{\lambda_k\leqslant\lambda}\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}，其中\ \lambda<0。\qquad (124)$$

留意公式 (123) 及在上面关于$\mathscr{E}_\lambda$所說的，可知当$\lambda>0$时θ_λ是积分运算子，其核是

$$\theta(x, y; \lambda)=-\sum_{\lambda_k>\lambda}\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}，其中\ \lambda>0，\qquad (125)$$

其中的和也是只包括有穷多項。当λ經过一固有值时，这核必有一跳跃的改变。由公式 (123) 直接可知当$\lambda<0$时$\theta_\lambda^2=\theta_\lambda$，而当$\lambda>0$时$\theta_\lambda^2=-\theta_\lambda$，从而可以写成下面形式

$$\int_a^b\theta(x, t; \lambda)\theta(t, y; \lambda)dt=\pm\theta(x, y; \lambda)\begin{cases}+(当\ \lambda<0\ 时),\\-(当\ \lambda>0\ 时)。\end{cases}\qquad (126)$$

函数$R_lf(x)$显然是方程$(K-lE)\varphi(x)=f(x)$的解，并可由公式 (121) 表示，其中λ应当换成l，并設$l\neq0$，也不与任何λ_k相等。关于豫解式可以由公式

$$R_l f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathscr{E}_\lambda f(x)}{\lambda - l} \tag{127}$$

出發而得出另一个公式，其中积分事实上是依包含运算子的譜的有穷区間而取的。

把 $\mathscr{E}_\lambda$ 换成 θ_λ，依 (123)，并减去其在 θ_λ 处的补充跃度，即当过 $\lambda=0$ 时等于$(-E)$，可以把上面公式写成下面形式：

$$R_l f(x) = -\frac{1}{l} f(x) + \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon_1} \frac{d_\lambda \left[\int_a^b \theta(x, y; \lambda) f(y)\, dy \right]}{\lambda - l} + \right.$$
$$\left. + \int_{\varepsilon_2}^{\infty} \frac{d_\lambda \left[\int_a^b \theta(x, y; \lambda) f(y)\, dy \right]}{\lambda - l} \right]。 \tag{128}$$

148. 有界运算子　現在設积分运算子 (97) 是有界自共軛运算子，我們要举出一些关于这种运算子的譜函数的結果而不加証明。这样的运算子的核可以借滿足条件 (115) 的核 $K_n(x, y)$ 近似，这是依照下面意义：

$$|K_n(x, y)| \leqslant |K(x, y)|,\ K_n(x, y) \to K(x, y)$$

在正方形 Δ_0 中殆遍成立。这时关于核 $K_n(x, y)$ 的函数 $\theta_n(x, y; \lambda)$ 的極限是函数 $\theta(x, y; \lambda)$，这是关于 $K(x, y)$ 的运算子 ϑ_λ 的核，而 θ_λ 由公式(123)定义，其中 $\mathscr{E}_\lambda$ 是与具有核 $K(x, y)$ 的运算子相应的。运算子的与零不同的固有值必然是有穷秩的，并且只能以 $\lambda=0$ 为凝点。函数

$$e_s(x, y; \lambda_s) = \theta(x, y; \lambda_s + 0) - \theta(x, y; \lambda_s - 0) \tag{129}$$

是在与固有值 λ_s 相应的固有函数子空間中的投影运算子的核。这核的形式是

$$e_s(x, y; \lambda_s) = \sum_m \varphi_{s,m}(x) \overline{\varphi_{s,m}(y)},$$

其中 $\varphi(x)$ 是与固有値 λ_s 相应的固有函数規格化正交組。在点 $\lambda=0$ 处运算子 θ_λ 显然有等于 e_0-E 的跃度，其中 e_0 是在与固有値 $\lambda=0$ 相应的固有函数所組成的子空間中的投影运算子。如果沒有这样的函数，那末可以叫这核做閉的。如果从函数 $\theta(x, y; \lambda)$ 減去其在点 λ_s 处的跃度函数，那末可得譜函数 $\theta(x, y; \lambda)$ 的連續部分 $\sigma(x, y; \lambda)$。下面將設积分运算子根本沒有固有函数，就是說其譜是純連續的。

現在关于 L_2 中的积分运算子来引出[117]中一般理論的公式。設 $\omega_k(x)$ 是 L_2 中的元，与[117]中的 y_k 相应，使 $\mathscr{E}_\lambda \omega_k(x)$ 組成子空間 L_{y_k}。这些子空間依[117]中的公式 (184) 是在任意完全正交組的基础上作的，显然可以設那些相互正交的函数 $\omega_k(x)$ 是規格化的。显然

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{E}_\lambda y_k&=\int_a^b \theta(x,\ y;\ \lambda)\omega_k(y)\,dy \text{ 如果 } \lambda<0,\\ \mathscr{E}_\lambda y_k&=\int_a^b \theta(x,\ y;\ \lambda)\omega_k(y)\,dy-\omega_k(x) \text{ 如果 } \lambda>0。\end{aligned}\right\} \tag{130}$$

把微分解 $\mathscr{E}_\lambda y_k$ 表示成 $x_k(x,\ \lambda)$。又

$$\rho_k(\lambda)=\|\mathscr{E}_\lambda y_k\|^2=\int_a^b |x_k(x,\ \lambda)|^2 dx, \tag{131}$$

而如果 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 是 L_2 中某两元，那末令

$$g_k(\lambda)=(\mathscr{E}_\lambda y_k,\ \varphi)=\int_a^b x_k(x,\ \lambda)\overline{\varphi(x)}\,dx, \tag{132}$$

$$h_k(\lambda)=(\mathscr{E}_\lambda y_k,\ \psi)=\int_a^b x_k(x,\ \lambda)\overline{\psi(x)}\,dx, \tag{133}$$

可以把[117]中的公式 (132_1) 及 (132_2) 写成下面形式：

$$\int_a^b \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx=\sum_k\int_m^M \frac{\overline{dg_k(\lambda)}\,dh_k(\lambda)}{d\rho_k(\lambda)}, \tag{134}$$

$$\int_a^b\int_a^b K(x,\ y)\varphi(y)\overline{\psi(x)}\,dx\,dy=\sum_k\int_m^M \lambda\frac{\overline{dg_k(\lambda)}\,dh_k(\lambda)}{d\rho_k(\lambda)}, \tag{135}$$

$$\int_a^b \mathscr{E}_\lambda\varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx=\sum_k\int_m^\lambda \frac{\overline{dg_k(\mu)}\,dh_k(\mu)}{d\rho_k(\mu)}, \tag{136}$$

其中 m 与 M 是运算子的界，而公式(135)左边的积分应当看做是依某种次序的累次积分。如果 $\varphi(x)$ 属于线性簇 l，而在 l 上积分(98)有意义，那末上面的积分做为重积分是存在的。[117]中其余公式作下面形式：

$$\varphi(x)=\sum_k\int_m^M \frac{\overline{dg_k(\lambda)}}{d\rho_k(\lambda)}\,dx_k(x,\ \lambda), \tag{137}$$

$$\int_a^b K(x,\ y)\varphi(y)\,dy=\sum_k\int_m^M \lambda\frac{\overline{dg_k(\lambda)}}{d\rho_k(\lambda)}\,dx_k(x,\ \lambda), \tag{138}$$

$$\mathscr{E}_\lambda\varphi(x)=\sum_k\int_m^\lambda \frac{\overline{dg_k(\mu)}}{d\rho_k(\mu)}\,dx_k(x,\ \mu)。 \tag{139}$$

在有无穷多项的情形，級数应当依中值收斂于左边的相应量。

微分解 $x(x,\ \lambda)$ 满足方程

$$\int_a^b K(x,\ y)x(y,\ \lambda)\,dy=\int_m^\lambda \mu\,dx(x,\ \mu), \tag{140}$$

而如以往一样設 $x(x,\ m)=0$。这些解的正交性可以由下面公式表示：

$$\int_a^b \Delta_1 x_p(x,\ \lambda)\cdot\overline{\Delta_2 x_q(x,\ \lambda)}\,dx=0 \quad (p\neq q)。 \tag{141}$$

在作上述的公式时可以从任意一完全正交的微分解 $x_k(x,\ \lambda)$ 組出發。在下

几节中将考察 L_2 中积分解的一些例。

149. 傅立叶映像　我們現在开始考察傅立叶映像，这我們以后将应用到：

$$F(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-ixy}dx。\tag{142}$$

如果 $f(x)\in L_2$，而 L_2 是在区間 $(-\infty, +\infty)$ 上的，那末由于区間是无穷的，$f(x)$ 并不一定要在那区間上是可和的，而积分(142)可能无意义。考察由下面的函数組成的綫性簇 l：卽在有穷多个有穷区間上取定值，而在这些区間之外等于零。由[65]已知这綫性簇在 L_2 中是到处稠密的。对于 l 中任意函数 $f(x)$，积分(142)变成在有穷区間上的积分，因而对于一切 y 值都存在。我們証明这时 $F(y)\in L_2$，并且下面等式成立：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|F(y)|^2dy=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx,\tag{143}$$

而在所考察的情形中右边无穷的积分上下限实际上变成有穷的。取正数 μ，可以写成

$$\int_{-\mu}^{+\mu}|F(y)|^2dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\mu}^{+\mu}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1)e^{-ix_1y}dx_1\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(x_2)}e^{ix_2y}dx_2\right]dy,$$

而在右边可以改变积分次序，因为事实上，在一切积分中积分限都是有穷的，而如果把一切函数都换成其絕对值，因为 $|e^{ixy}|=1$，累次积分仍保持有意义[70]。完成第一次依 y 的积分可得

$$\int_{-\mu}^{+\mu}|F(y)|^2dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1)\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(x_2)}\frac{\sin\mu(x_1-x_2)}{x_1-x_2}dx_2\right]dx_1。\tag{144}$$

現在証明方括弧中的式子依絕对值为常数 C 所界，而 C 与 x_1 及 μ 都无关，并且該式当 $\mu\to\infty$ 时到处趋向于 $\overline{f(x_1)}$，但在 $f(x)$ 取定值的区間的两端除外。这时在依 x_1 的积分中积分号下的函数依絕对值不超过可和函数 $C|f(x_1)|$，而我們可以在依 x_1 的积分号下取 $\mu\to\infty$ 时的極限，于是得公式(143)。以上关于公式(144)方

括号中式子所說的，只須就 $f(x)$ 在某一有穷区間 $[a, b]$ 上等于某常数 k 而在这区間之外等于零的情形証明就够了。这时：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{ab}(x_2)\frac{\sin\mu(x_1-x_2)}{x_1-x_2}dx_2 = k\cdot\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\sin\mu(x_1-x_2)}{x_1-x_2}dx_2 =$$

$$= k\cdot\frac{1}{\pi}\int_{\mu(x_1-b)}^{\mu(x_1-a)}\frac{\sin t}{t}dt。\qquad (145)$$

对于任意选擇的 α 及 β，积分

$$\int_\alpha^\beta \frac{\sin t}{t}\,dt$$

依絕对值不超过某一常数 [II;(152)]，而由此直接可知 (145) 对于任意 x_1 及 μ 有界。如果 x_1 在 $[a, b]$ 之外，那末 $\mu(x_1-b)$ 及 $\mu(x_1-a)$ 同号且当 $\mu\to\infty$ 时都趋向于$(+\infty)$或趋向于$(-\infty)$，而式(145)趋向于零。如果 x_1 在$[a, b]$之内，那末 $\mu(x_1-a)\to+\infty$，而 $\mu(x_1-b)\to-\infty$，而式(145)的極限是 k，因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt = \pi。$$

也容易証明，如果 $x_1=a$ 或 $x_1=b$，那末式(145)的極限等于 $k:2$。如此公式(143)証明了，并且可知公式(142)在綫性簇 l 上定义了一个分配运算子，这运算子不改变范数。用 $T(f)$ 表示这运算子，則在綫性簇 l 上 $\|T(f)\|=\|f\|$。依 [98] 中所說的，运算子 $T(f)$ 可以唯一地扩展到整个 L_2 上去而使范数不超过 1。現在証明等式 $\|T(f)\|=\|f\|$ 对于 L_2 中的任意元 f 也成立。設 $f(x)$ 是 L_2 中的任意元。存在 l 中一序列元 $f_n(x)$，使 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$，而这时显然 $T(f_n)\Rightarrow T(f)$ [98]。那末 $\|f_n\|\to\|f\|$，$\|T(f_n)\|\to\|T(f)\|$ [94]，而另一方面，$\|f_n\|=\|T(f_n)\|$ 因为 $f_n\in l$。由此可知 $\|f\|=\|T(f)\|$，就是說运算子 $T(f)$ 在整个 L_2 上都不改变范数。

用 $T^*(f)$ 表示由公式

$$T^*(f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixy}dx \qquad (146)$$

定义的定义于 l 上的运算子。与以前一样，可以証明在 l 上 $\|T^*(f)\|=\|f\|$，而当把 T^* 扩展到整个 L_2 上时这等式仍成立。

依 $T(f)$ 的定义，当 $f(x)\in l$ 时这运算子由公式 (142) 表示。現在証明下面定理。

定理 1. 对于 L_2 中凡在一有穷区間之外等于零的函数 $f(x)$，运算子 $T(f)$ 及 $T^*(f)$ 各由公式(142)及(146)表示。

如果 L_2 中的 $f(x)$ 在 $[-a,\ +a]$ 之外等于零，那末它是可和的，而可以对于任意 y 作函数

$$\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{+a}f(x)e^{-ixy}dx。\tag{147}$$

另一方面，$F(y)=T(f)$，我們必須証明 $\Phi(y)$ 与 $F(y)$ 相抵。設 $f_n(x)$ 是 l 中的函数列，使 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$。显然可設 $f_n(x)$ 在 $[-a,\ +a]$ 之外等于零。作它們的傅立叶映像：

$$T(f_n)=F_n(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{+a}f_n(x)e^{-ixy}dx。\tag{148}$$

由 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$ 及映像 T 的有界性可知 $T(f_n)\Rightarrow T(f)$，就是說：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|F(x)-F_n(x)|^2dx\to 0,$$

因此对于任意有穷区間 $[-b,\ +b]$：

$$\int_{-b}^{+b}|F(x)-F_n(x)|^2dx\to 0。\tag{149}$$

另一方面，由(147)及(148)并引用舒伐尔茲不等式可知

$$|\Phi(y)-F_n(y)|^2\leqslant\frac{a}{\pi}\int_{-a}^{+a}|f(x)-f_n(x)|^2dx=\frac{a}{\pi}\|f-f_n\|^2,$$

而因为 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$，可知 $F_n(y)$ 在整个区間 $(-\infty,\ +\infty)$ 上一致收斂于 $\Phi(y)$，由此直接得知

$$\int_{-b}^{+b}|\Phi(y)-F_n(y)|^2dy\to 0。$$

与(149)比較并留意 b 是任意的，可知 $F(y)$ 及 $\Phi(y)$ 相抵，于是定理証明了。对于运算子 $T^*(f)$ 定理的証明完全一样。

注　不难再証明，对于 L_2 中凡在区間 $(-\infty, +\infty)$ 上可和的函数 $f(x)$，运算子 $T(f)$ 及 $T^*(f)$ 各由公式(142)及(146)表示。設 $f(x)$ 是这样的函数，而 $f_n(x)$ 是在区間 $[-n, +n]$ 上等于 $f(x)$，而在这区間之外等于零的函数。使 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$，因而 $T(f_n) \Rightarrow$ $\Rightarrow T(f)$。依証明了的定理：

$$T(f_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{+n} f(x) e^{-ixy} dx_{\circ}$$

但依条件，$f(x)$ 在区間 $(-\infty, +\infty)$ 上可和，因而 $f(x)e^{-ixy}$ 也如此，所以对于任意 y，

$$\lim_{n\to\infty} T(f_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx_{\circ}$$

但 $T(f_n)$ 既对于一切 y 趋向于上写的积分，而此外，依上面所說的，依中值趋向于 $T(f)$，那末由此可知 [57] $T(f)$ 的确由上面的积分表示。

在上面曾看到，定义于整个 L_2 上的运算子 $T(f)$ 及 $T^*(f)$ 不改变范数。现在証明，T^*T 正是不变映像 E。只須証明它在綫性簇 l 上是不变映像，而由于运算子的分配性，只須就在有穷区間 $[a, b]$ 上等于常数 k 而在其外等于零的函数 $f_{ab}(x)$ 来証明就够了。这时：

$$T(f_{ab}) = F^{(ab)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{ab}(x) e^{-ixy} dx =$$

$$= \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-ixy} dx = k \frac{e^{-iya} - e^{-iyb}}{\sqrt{2\pi}\, yi}_{\circ}$$

为了作 $T^*(F^{(ab)})$，作截函数 $F_n^{(ab)}(y)$，使它在区間 $[-n, +n]$ 上等于 $F^{(ab)}(y)$，而在这区間之外等于零。于是

$$T^*(F_n^{(ab)}) = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{+n} \frac{e^{-iya} - e^{-iyb}}{\sqrt{2\pi}\, yi} e^{ixy} dy =$$

$$= \frac{k}{\pi} \int_0^n \frac{\sin(x-a)y}{y} dy + \frac{k}{\pi} \int_0^n \frac{\sin(b-x)y}{y} dy_{\circ}$$

当 $n \to \infty$ 时，对于任意 x 右边有确定極限，而左边依中值收斂于

$T^*(F^{(ab)})$，于是与上面一样，由此可知

$$T^*(F^{(ab)})=\frac{k}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin(x-a)y}{y}dy+\frac{k}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin(b-x)y}{y}dy。$$

如果 $a<x<b$，那末右边两个积分都等于 $\frac{\pi}{2}$。如果 $x<a$ 或 $x>b$，那末其中一个积分等于 $\frac{\pi}{2}$，而另一等于 $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$，如此右边当 $a<x<b$ 时等于 k，而当 $x<a$ 或当 $x>b$ 时等于零。在 $x=a$ 及 $x=b$ 时，右边等于 $k:2$，这无关宏旨，因为这只是换成相抵函数而已。如此 $T^*Tf_{ab}(x)=f_{ab}(x)$，由此可知 $T^*T=E$。由上述直接可知

定理 2. 映像 T 是 L_2 中的么范映像，而 T^* 是其逆，并与它共轭。

現在作关于 $T(f)$ 的公式，适用于整个 L_2。設与以前一样，$f_n(x)$ 在区間 $[-n, +n]$ 上等于 $f(x)$，而在其外等于零。那末 $T(f_n)\Rightarrow T(f)$，就是說当 $n\to\infty$ 时

$$\int_{-n}^{+n}f(x)e^{-ixy}dx\Rightarrow T(f)。$$

完全同样可以写出关于在整个 L_2 上的映像 T^* 的公式。在下面依中值的極限用記号 lm 表示，于是所得結果可以写成下面形式：

$$T(f)=\underset{n\to\infty}{\text{lm}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{+n}f(x)e^{-ixy}dx;$$

$$T^*(f)=\underset{n\to\infty}{\text{lm}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{+n}f(x)e^{ixy}dx。\tag{150}$$

再举出一个联系 $f(x)$ 及 $F(y)=T(f)$ 的公式。設当 $0\leqslant x\leqslant\xi$ 时 $g(x)=1$，而在这区間之外 $g(x)=0$。像函数将是

$$G(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\xi y}-1}{-iy},$$

旣然么范映像并不改变数积，就是說 $(f, g)=(F, G)$，可以写成

$$\int_0^\xi f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(y)\frac{e^{i\xi y}-1}{iy}dy,\tag{151}$$

而完全同样，

$$\int_0^{\xi} F(y)\,dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{e^{-i\xi x}-1}{-ix}\,dx\ 。\qquad (152)$$

关于傅立叶映像，有折合公式成立，我們現在就推导［比較 IV；70］。設 $g(t)$ 及 $f(t)\in L_2$。对于任意实数 x，$g(x-t)$ 做为 t 的函数屬于 L_2。定义 $T[g(x-t)]$：

$$T[g(x-t)]=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{+a} g(x-t)e^{-iyt}dt=$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x-a}^{x+a} g(u)e^{-iy(x-u)}du=$$

$$=e^{-iyx}\lim_{a\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x-a}^{x+a} g(u)e^{iyu}du,$$

就是說，$T[g(x-t)]=e^{-iyx}T^*[g(t)]$，而留意么范映像不改变数积，可以写成：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx}T^*[g(t)]\overline{T[\overline{f(t)}]}\,dy,$$

其中
$$T^*[g(t)]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n} g(t)e^{iyt}dt;$$

$$\overline{T[\overline{f(t)}]}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{+n} f(t)e^{iyt}dt=T^*[f(t)],$$

最后得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} G_1(y)F_1(y)e^{-iyx}dy,\qquad (153)$$

其中 $G_1(y)=T^*[g(t)]$，$F_1(y)=T^*[f(t)]$。

对于多变数函数的情形也可以完全同样地証明基本定理。这时，代替(150)，么范映像由下面公式定义：

$$T(f)=$$

$$=\lim_{m_k\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{-m_1}^{+m_1}\cdots\int_{-m_n}^{+m_n} f(x_1,\cdots,x_n)e^{-i(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)}dx_1\cdots dx_n,\qquad (154)$$

而逆映像由下面公式定义：

$$T^*(F)=$$

$$=\lim_{m_k\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{-m_1}^{+m_1}\cdots\int_{-m_n}^{+m_n}F(y_1,\cdots,y_n)e^{i(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)}dy_1\cdots dy_n。\quad(155)$$

回到一变数的情形，再注意几个关于傅立叶映像的性質。如果在(150)的第一式中把 x 换成$(-x)$，并与第二式比較，留意 $T^*=T^{-1}$ 可得 $T^2f(x)=f(-x)$，同样 $T^{*2}F(y)=F(-y)$。如果 $f(x)$ 是偶函数，那末映像(150)仍变出与偶函数相抵的函数 $F(y)$，而

$$F(y)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^n f(x)\cos xy dx;$$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^n F(y)\cos xy dy。$$

这些公式表現出在区間 $(0,\infty)$ 上的 L_2 中函数的么范映像。換符号并乘上 i（这些运算显然都是么范映像），在奇函数的情形，得到下面一对相互为逆的区間 $(0,\infty)$ 上的么范映像：

$$F(y)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^n f(x)\sin xy dx;$$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^n F(y)\sin xy dy。$$

150. 乘法运算　現在考察在有穷区間上乘以自变数的乘法运算，而在区間的左端取 $x=0$。如此考察有穷区間 $[0,a]$ 上的空間 L_2，及乘自变数的运算

$$Af(x)=xf(x)。\quad(156)$$

那末　$(Af,g)=\int_0^a xf(x)\overline{g(x)}dx$，而 $(Af,f)=\int_0^a x|f(x)|^2dx$，

由此看出，A 是自共轭运算子，而其范数不超过 a。如果取 $f(x)$ 只在 $x=a$ 的小邻域中不等于零，那末不难得知 A 的范数确等于 a。在 $\|f\|=1$ 的条件下，二次型 (Af,f) 的界各等于：$m=0$，$M=a$。关于固有值及固有元的方程成为下面的形式：$xf(x)=$ $=\lambda f(x)$，即 $(x-\lambda)f(x)=0$，由此看出 $f(x)$ 与零相抵，就是說沒

有固有值，而譜是純点的。豫解式显然是做下面的形式：$R_\lambda f(x) = = f(x):(x-\lambda)$。如果 λ 在区間 $[0, a]$ 之外，那末 $R_\lambda f(x) \in L_2$。如果 λ 在区間 $[0, a]$ 之中，那末 $R_\lambda f(x)$ 并不对于一切 $f(x)$ 仍屬于 L_2。这时运算子 $(A-\lambda E)f(x)=(x-\lambda)f(x)$ 把 L_2 一对一地映像在綫性綜 M_λ 上，而 M_λ 是由凡满足 $\varphi(x):(x-\lambda)\in L_2$ 的函数 $\varphi(x)=(x-\lambda)f(x)$ 所組成的。我們来确定譜函数 $\mathscr{E}_\lambda$，其中 λ 須設屬于区間 $[0, a]$。留意

$$\lim_{\tau\to+0}\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{2\tau i}{(\sigma-x)^2+\tau^2}\,d\sigma=$$

$$=2i\lim_{\tau\to+0}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\lambda-x}{\tau}+\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 & \text{当 } \lambda<x \\ 2\pi i & \text{当 } \lambda>x\end{cases}\text{时，}$$

对于任意元 $f(x)$ 及 $\psi(x)$ 可得[112]：

$$(\mathscr{E}_\lambda f, \psi)=\lim_{\tau\to+0}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\lambda}\left[\int_0^a\frac{2\tau i}{(x-\sigma)^2+\tau^2}f(x)\overline{\psi(x)}\,dx\right]d\sigma=$$

$$=\int_0^\lambda f(x)\overline{\psi(x)}\,dx,$$

由此得知

$$\mathscr{E}_\lambda f(x)=\begin{cases}f(x) & \text{如果 } x\leqslant\lambda, \\ 0 & \text{如果 } x>\lambda。\end{cases}\qquad(157)$$

取 $f(x)\equiv1$，可得微分解：当 $x\leqslant\lambda$ 时 $\pi(x, \lambda)=1$，当 $x>\lambda$ 时 $\pi(x, \lambda)=0$。应用公式(157)及[53]中的性質 11 不难看出与它正交的解不存在。

考察更一般的自共軛运算子

$$Bf(x)=\omega(x)f(x),\qquad(158)$$

其中 $\omega(x)$ 是区間 $[0, a]$ 上的实值可測有界函数。关于固有值及固有元的方程是作下面形式：$[\omega(x)-\lambda]f(x)=0$。設 K_λ 是凡满足方程 $\omega(x)=\lambda$ 的 x 值集合。如果 K_λ 的測度等于零，那末 λ 不是固有值。如果 K_λ 的測度大于零，那末 λ 是固有值，而在集合 K_λ 上的任意完全正交的函数組都是与上面那固有值相应的完全

固有函数組，而在 K_λ 之外这些函数应当算做等于零。如果对于任意 λ，K_λ 的測度等于零，那末运算子(158)有純連續譜。完全与(157)相似，它的譜函数由下面公式决定：

$$\mathscr{E}_\lambda f(x)=\begin{cases} f(x) & \text{如果 } \omega(x)\leqslant\lambda, \\ 0 & \text{如果 } \omega(x)>\lambda。\end{cases} \tag{159}$$

凡上面所述的很容易推广到多变数函数的情形。例如对于屬于某有劳区間 $a_s\leqslant x_s\leqslant b_s(s=1, 2, \cdots, n)$ 上的 L_2 的函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，可以定义乘自变数 x_k 的自共軛运算子：$Af=x_kf$。这运算子在区間 $a_k\leqslant\lambda\leqslant b_k$ 上有純連續譜，而其譜函数依下面方式定义：

$$\mathscr{E}_\lambda f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\begin{cases} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) & \text{如果 } x_k\leqslant\lambda, \\ 0 & \text{如果 } x_k>\lambda。\end{cases} \tag{160}$$

回到一变数的情形。在无劳区間上乘自变数的运算子已經不是有界运算子了。我們在將来再考察它。如果取运算子(158)，而設函数 $\omega(x)$ 在无劳区間上有界，那末得一有界綫性运算子。如此，取区間 $(-\infty, +\infty)$ 上的空間 L_2 为基础，并設 $\omega(x)$ 是在这区間上实值可測有界函数。如此公式(158)决定一自共軛有界运算子。如果 $\omega(x)$ 在閉区間 $[-\infty, +\infty]$ 中是連續的，那末运算子的界与 $\omega(x)$ 的最大及最小值相等。

151. 依从于差的核 引用在区間 $(-\infty, +\infty)$ 上的运算子(158)，借助映像 T 轉变到么范相抵的运算子，很容易作具有依从于差的核的有界积分运算子。

我們来指出这作法的梗概。与(158)么范相抵的运算子 $B'=T^*BT$ 显然由下面公式表示：

$$B'f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\omega(y)\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-ity}\,dt\right]e^{ixy}dy。$$

这里以及在以后，我們都用具有无劳限的积分来代替 $\lim\limits_{n\to\infty}$。設 $\omega(y)$ 不只有界，而且在区間 $(-\infty, +\infty)$ 上可和，而 L_2 中的 $f(t)$ 也可和，可以調换积分次序，得出

$$B'f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(y)e^{iy(x-t)}dy\right]f(t)\,dt,$$

或者，引入函数

$$g(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(y)e^{iyu}dy=T^*[\omega(y)] \tag{161}$$

后，可以把运算子 B' 写成下面形式：

$$B'f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-t)f(t)\,dt。 \tag{162}$$

B' 的譜函数由公式 $\mathscr{E}'_\lambda=T^*\mathscr{E}_\lambda T$ 表現（我們在以前已經知道了），其中 $\mathscr{E}_\lambda$ 是 B 的譜函数。如果像在下例中那样核滿足[144]的条件(100)，就是說

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|g(u)|\,du<+\infty, \tag{163}$$

那末公式(162)不仅适用于在区間$(-\infty, +\infty)$上可和的函数$f(x)$，而在整个L_2上都适用。考察应用上述程序来作积分运算子的例。

1．設

$$Bf(x)=\frac{2}{1+x^2}f(x)。 \tag{164}$$

这运算子的界是：$m=0$, $M=2$。对于区間 $[0, 2]$ 中的任意 λ，方程 $2:(1+x^2)=\lambda$ 至多有两个根，于是运算子(164)有純連續譜。

运算子 B' 的核由下面公式定义 [III; 130]：

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iyu}}{1+y^2}dy=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos yu}{1+y^2}dy=\sqrt{2\pi}e^{-|u|},$$

而

$$B'f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-y|}f(y)\,dy。 \tag{165}$$

所得的核滿足[144]中的条件(100)：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|K(x,y)|\,dy=\int_{-\infty}^{x}e^{y-x}dy+\int_{x}^{\infty}e^{x-y}dy=2。$$

依(159)，运算子(164)的譜函数可以这样来确定：$\mathscr{E}_\lambda f(x)=f(x)$ 如果 $2:(1+x^2)\leqslant\lambda$，而 $\mathscr{E}_\lambda f(x)=0$ 如果 $2:(1+x^2)>\lambda$；就是說

$$\mathscr{E}_\lambda f(x)=\begin{cases} f(x) & \text{如果 } |x|\geqslant\mu,\\ 0 & \text{如果 } |x|<\mu,\end{cases}$$

其中 $\mu=\sqrt{(2-\lambda):\lambda}$，而

$$\mathscr{E}'_\lambda f(x)=T^*\mathscr{E}_\lambda Tf(x)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{-\mu}+\int_{\mu}^{+\infty}\right)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-ity}dt\right]e^{ixy}dy,$$

就是說：

$$\mathscr{E}'_\lambda f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-ity}dt\right]e^{ixy}dy-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\mu}^{+\mu}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-ity}dt\right]e^{ixy}dy。$$

上写具有无穷限的广义积分应当了解成依中值平方趋近的意义。在最后积分中交换积分次序(这交换的可能性很容易証明)，并留意 $T^*T=E$，可知

$$\mathcal{E}'_\lambda f(x)=f(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\mu(x-t)}{x-t}f(t)\,dt。\tag{166}$$

运算子 B' 有純連續譜，而 $\mathcal{E}'_\lambda f(x)$ 当 $\lambda\to 0$ 时依中值趋向于零，就是說

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\mu(x-t)}{x-t}f(t)\,dt=f(x)。\tag{167}$$

作运算子 (165) 的微分解。容易看出，齐次方程 $B'f(x)=\lambda f(x)$ 有不屬于 L_2 的解 $\cos\mu x$ 及 $\sin\mu x$，就是說

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-y|}\cos\mu y\,dy=\lambda\cos\mu x;\quad\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-y|}\sin\mu y\,dy=\lambda\sin\mu x。$$

把两边乘 $e^{-\mu}\dfrac{d\mu}{d\lambda}$，而对 λ 从 $\lambda=0$ 到 λ 积分，并对 μ 从 μ 到 $\mu=\infty$ 积分，可得下面两微分解：

$$\left.\begin{aligned}x_1(x,\lambda)&=\int_{\infty}^{\mu}e^{-\mu}\cos\mu x\,d\mu=-e^{-\mu}\left(\frac{\cos\mu x}{1+x^2}-\frac{x\sin\mu x}{1+x^2}\right),\\ x_2(x,\lambda)&=\int_{\infty}^{\mu}e^{-\mu}\sin\mu x\,d\mu=-e^{-\mu}\left(\frac{x\cos\mu x}{1+x^2}+\frac{\sin\mu x}{1+x^2}\right)。\end{aligned}\right\}\tag{168}$$

这些函数屬于 L_2，而由它們的作法本身就可得知它們滿足方程 (140)；而当 $\lambda=0$ 时变成零，就是說当 $\mu=\infty$ 时变成零。加添上因子 $e^{-\mu}$ 是为了有可能从 $\mu=\infty$ 起积分，如此得出一直到 $\lambda=0$ 連續的解。解(168)在基本区間 $(-\infty,+\infty)$ 中依(141)的意义相互正交，因为其中一个是偶函数，另一个是奇函数。

写出[148]中的公式(131)及(132)。由簡單的計算可得

$$\rho_1(\lambda)=\rho_2(\lambda)=\frac{\pi}{2}e^{-2\mu},$$

而

$$g_1(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{\infty}^{\mu}e^{-\mu}\cos\mu y\,d\mu\right]\overline{\varphi(y)}\,dy,$$

$$g_2(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{\infty}^{\mu}e^{-\mu}\sin\mu y\,d\mu\right]\overline{\varphi(y)}\,dy,$$

解組(168)的完全性可借公式(139)証明。如果使用公式 (134) 于 L_2 中的实值函数 $\varphi(x)$ 及在区間 $[0,x]$ 上等于 1 而在其外等于零的函数 $\psi(x)$，那末經过初等变换之后可得

$$\int_0^x\varphi(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{\sin\mu x}{\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\cos\mu y\,dy+\left(\frac{1}{\mu}-\frac{\cos\mu x}{\mu}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\sin\mu y\,dy\right]d\mu,$$

这在某些补充条件之下就变成平常的傅立叶公式。留意解(168)应当借应用运算子$\mathscr{E}'_\lambda$于函数$\pi_k(x, 2)$上而得出,就是說将$\mathscr{E}'_\lambda$应用于$1:(1+x^2)$及$x:(1+x^2)$上得出,这是很容易驗明的。如果在积分时不加添因子$e^{-\mu}$,而从$\mu=0$积分,那末得出簡單的微分解$\sin\mu x:x$及$(1-\cos\mu x):x$,这些当$\lambda\to0$时失去意义,而其范数当$\lambda\to0$时无限地增大。

考察映像(162)的一般情形,設$g(y)$是滿足条件(163)的实値偶函数。这时运算子(162)定义于整个L_2上,并且是有界自共軛运算子。可以作

$$G_1(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(u)e^{itu}du;\quad F_1(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{itu}du, \tag{169}$$

而

$$|G_1(t)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(u)|du,$$

就是說$G_1(t)$是有界函数,而$F_1(t)\in L_2$, $G_1(t)F_1(t)\in L_2$。可以証明在这情形公式(153)成立,这可以写成下面形式:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-t)f(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}G_1(t)F_1(t)e^{-ixt}dt=$$
$$=T[G_1(t)F_1(t)],$$

由此可知$G_1(t)F_1(t)=T^*[\varphi(x)]$,并留意公式(169)中的第二个,可以看出运算子(162)与乘有界函数$G_1(t)$的运算子么范相抵。

举出一类核,可以化为依从于差的核。設区間$(0, \infty)$上的实对称核$K(x, y)$,是負一維的齐次函数。如果在具有这样的核的积分运算子

$$\varphi(x)=\int_0^\infty K(x, y)f(y)dy \tag{170}$$

中代替x及y引入新的自变数$x=e^s$, $y=e^t$,而代替函数$\varphi(x)$及$f(y)$引入新函数$\varphi_1(s)=e^{\frac{s}{2}}\varphi(e^s)$及$f_1(t)=e^{\frac{t}{2}}f(e^t)$,那末可得积分运算子

$$\varphi_1(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}K_1(s, t)f_1(t)dt,$$

其核依从于$|s-t|$。事实上,依齐次性$K(x, y)=x^{-1}K\left(1, \frac{y}{x}\right)$,而令$K(1, z)=\omega(z)$,可以写成:

$$K_1(s, t)=e^{\frac{s+t}{2}}e^{-s}\omega(e^{t-s})=e^{\frac{t-s}{2}}\omega(e^{t-s}),$$

依$K(x, y)$的对称性,上式是$t-s$的偶函数。留意$ds=dx:x$,可以看出在上述的变数代换之下在区間$(0, \infty)$上的函数空間L_2变到区間$(-\infty, +\infty)$上的函数空間L_2。可以借下面的簡單定理直接定出运算子(170)的范数:

定理 如果$K(x, y)$是非負的,(-1)次齐次的,而

$$\int_0^\infty K(x,1)x^{-\frac{1}{2}}dx=\int_0^\infty K(1,y)y^{-\frac{1}{2}}dy=k, \tag{171}$$

那末

$$|I|=\left|\int_0^\infty\int_0^\infty K(x,y)f(x)g(y)\,dx\,dy\right|\leqslant k\|f\|\cdot\|g\|。 \tag{172}$$

留意由于核的齐次性，公式 (171) 的积分相等。把积分号下的函数写成形式 $f(x)\sqrt{K}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{4}}g(y)\sqrt{K}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{4}}$，并引用舒伐尔兹不等式，可得 $|I|\leqslant\sqrt{A}\sqrt{B}$，而

$$A=\int_0^\infty|f(x)|^2\left[\int_0^\infty K(x,y)\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}dy\right]dx=k\|f\|^2;$$

完全同样 $B=k\|g\|^2$，由此得(172)。由 (172) 可得具有核 $K(x, y)$ 的运算子的范数不超过 k。特別是如果 $K(x, y)=1:(x+y)$，依

$$\int_0^\infty\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1+x}dx=\pi,$$

可得

$$\left|\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{f(x)\overline{g(y)}}{x+y}dx\,dy\right|\leqslant\pi\|f\|\cdot\|g\|。$$

完成上述的变数代换，可以証明具有核 $1:(x+y)$ 的运算子在区間 $[0, \pi]$ 上有連續譜。

152. 空間 $L_{2,m}$　可以給出以 L_2 中的函数来实現希勒柏特空間的更一般表現。設 $\mathscr{E}$ 是 n 維空間中某一可測集合，而 L_2 是 $\mathscr{E}$ 上可測并平方可和的函数所組成的空間，而关于測度可以取勒貝格測度或是某另一个正常的集合函数。在后一情形將有勒貝格–斯提勒杰斯积分。定义空間 $L_{2,m}$ 如下。$L_{2,m}$ 中的元乃是 L_2 中的 m 个函数所成的序列：$(f_1, f_2, \cdots, f_m)$，其中 $f_k\in L_2(k=1, 2, \cdots m)$。零元乃是其中每个 f_k 与零相抵的元。用数相乘及加法都自然地定义如下：

$$a(f_1, f_2, \cdots, f_m)=(af_1, af_2, \cdots, af_m),$$
$$(f_1, f_2, \cdots, f_m)+(g_1, g_2, \cdots, g_m)=$$
$$=(f_1+g_1, f_2+g_2, \cdots, f_m+g_m),$$

而数积由下面公式定义：

$$(x, y)=\int_{\mathscr{E}}(f_1\bar{g}_1+f_2\bar{g}_2+\cdots+f_m\bar{g}_m)d\omega,$$

其中 $d\omega$ 在勒貝格积分的情形是 R_s 中的体积元素，而在勒貝格-斯提勒杰斯积分的情形是正常函数的微分。容易証明 $L_{2,m}$ 是可分的希勒柏特空間的表現。$L_{2,m}$ 中的綫性运算子 $y=Ax$ 与 L_2 中 m^2 个綫性运算子 $A_{ik}(i, k=1, 2, \cdots, m)$ 同效，而 y 的分量由 x 的分量表示如下：

$$g_i=\sum_{k=1}^{m} A_{ik} f_k。$$

上面希勒柏特空間的表現乃是由已知的希勒柏特空間 H_1, H_2, $\cdots$, H_m 作希勒柏特空間 H 的抽象作法的特例。空間 H 中的元 x 乃是指元序列 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$，其中 $x_k\in H_k$。元 x 叫做零，是指每个 x_k 是 H_k $(k=1, 2, \cdots, m)$ 中的零元。乘以数及元的相加两运算定义如下：

$$a(x_1, x_2, \cdots, x_m)=(ax_1, ax_2, \cdots, ax_m),$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_m)+(y_1, y_2, \cdots, y_m)=$$

$$=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_m+y_m),$$

而数积定义如下：

$$(x, y)=\sum_{k=1}^{m}(x_k, y_k)。$$

153. L_2 中的弱收斂 依弱收斂的一般定义，L_2 中的函数序列 $f_n(x)$ 叫做弱收斂于函数 $f(x)$，是指对于 L_2 中的任意函数 $g(x)$，

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)g(x)dx=\int_a^b f(x)g(x)dx, \tag{173}$$

而范数 $\|f_n\|\leqslant l$，其中数 l 与 n 无关。特别是对于在 $[a, b]$ 中任意一有穷区間 $\varDelta$ 上等于 1 而在 $\varDelta$ 之外等于零的函数 $g(x)$，(173) 也应当满足，就是說应当有

$$\lim_{n\to\infty}\int_\varDelta f_n(x)dx=\int_\varDelta f(x)dx。 \tag{174}$$

現在証明，反之，如果公式(174)对于任意有穷区間 $\varDelta$ 满足，那末

公式(173)对于 L_2 中任意函数 $g(x)$ 必满足。由公式(174)可知如果把 $g(x)$ 换成任意一个在有穷多个有穷区間 $\Delta_k(k=1, 2, \cdots, m)$ 之外等于零，而在每一个 Δ_k 上等于常数 a_k 的函数 $\omega(x)$，公式(173)也正确。現在取 L_2 中任意函数 $g(x)$，并写出下面显然的等式：

$$\int_a^b [f(x)-f_n(x)]g(x)dx=$$
$$=\int_a^b [f(x)-f_n(x)][g(x)-\omega(x)]dx+\int_a^b [f(x)-f_n(x)]\omega(x)dx,$$

由此，留意舒伐尔兹不等式，可以写成

$$\left|\int_a^b [f(x)-f_n(x)]g(x)dx\right|\leqslant\sqrt{\int_a^b |f(x)-f_n(x)|^2dx}\times$$
$$\times\sqrt{\int_a^b |g(x)-\omega(x)|^2dx}+\left|\int_a^b [f(x)-f_n(x)]\omega(x)dx\right|,$$

就是

$$\left|\int_a^b [f(x)-f_n(x)]g(x)dx\right|\leqslant$$
$$\leqslant\|f-f_n\|\cdot\|g-\omega\|+\left|\int_a^b [f(x)-f_n(x)]\omega(x)dx\right|。$$

应用三角形法則 $\|f-f_n\|\leqslant\|f\|+\|f_n\|$，及不等式 $\|f_n\|\leqslant l$，可以写出：

$$\left|\int_a^b [f(x)-f_n(x)]g(x)dx\right|\leqslant$$
$$\leqslant(\|f\|+l)\|g-\omega\|+\left|\int_a^b [f(x)-f_n(x)]\omega(x)dx\right|。\quad(175)$$

設 ε 是預定的正数。可以取函数 $\omega(x)$，使不等式 $\|g-\omega\|\leqslant\varepsilon$ 滿足[61]。又因为当把 $g(x)$ 换成 $\omega(x)$ 时公式(173)是正确的，所以存在一数 N，使公式(175)右边第二項当 $n\geqslant N$ 时 $\leqslant\varepsilon$；由这公式可得不等式

$$\left|\int_a^b [f(x)-f_n(x)]g(x)dx\right|\leqslant(\|f\|+l+1)\varepsilon \quad 当\ n>N\ 时成立,$$

由此，既然 ε 是任意的，可知左边的积分当 n 增大时趋向于零，就是說公式(173)是正确的。由上面的推理可知条件(173)可以换成同效的条件(174)，后者应对于任意有穷区間 Δ 都滿足。如果基本区間的左端是有穷的，那末条件(173)可以換成条件

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt,$$

这应当对于 $[a, b]$ 中任意 x 都滿足。取一簡單的例。函数 $\cos nx$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ 屬于任意有穷区間 $[a, b]$ 上的 L_2，而 $\|\cos nx\|\leqslant b-a$，

$$\int_a^x \cos nt\,dt=\frac{\sin nx-\sin na}{n}\to 0,$$

就是說 $\cos nx$ 弱收斂于零。如果在有穷或无穷区間 $[a, b]$ 上有規格化正交組 $\varphi_n(x)$，那末 $\|\varphi_n(x)\|=1$，

$$a_n=\int_a^b g(x)\varphi_n(x)\,dx\to 0,$$

对于 L_2 中的任意 $g(x)$ 成立，因为諸項 $|a_n|^2$ 之和是收斂級数，就是說 $\varphi_n(x)$ 弱收斂于零。

如果 $f_n(x)$ 弱收斂于 $f(x)$，那末由此还不能知道 $f_n(x)$ 殆遍收斂于 $f(x)$，而反之，由殆遍收斂也还不能得知弱收斂。但如果知道 $f_n(x)$ 弱收斂于 $f(x)$，且又殆遍收斂于 $F(x)$，那末可以証明 $f(x)$ 及 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上相抵。証明与强收斂的相似命題一样，强收斂就是指依中値收斂，見[57]。

現在回到[80]中輔助定理的証明，其中所論的是实値函数。由条件

$$\int_{\mathscr{E}}\varphi_n^2(P)\,m(d\mathscr{E})\leqslant A$$

可知函数集合 $\varphi_n(P)$ 依范数为数 $\sqrt{A}$ 所界，所以由序列 $\varphi_n(P)$ 可以选取一部分序列 $\varphi_{n_k}(P)$，弱收斂于某一函数 $\omega(P)$[127]，就是說(76_1)成立。公式(76_2)直接由[127]中所述得出。

§3. 无界运算子

154. 基本概念 我們考察分配无界运算子。这种运算子的特性不仅在于它的无界性，就是說沒有有穷的范数，而且它們可能并不定义于整个 H 上，而只定义于某綫性簇上。在其上这运算子有定义的綫性簇通常是在H中到处稠密的。首先我們研究无界的自共軛运算子，它們是有界自共軛运算子的很自然的推广。它們的特性乃是有确定的譜函数 $\mathscr{E}_\lambda$。只不过无界自共軛运算子的 $\mathscr{E}_\lambda$ 并不在 λ 軸上的有穷綫段上变化，如在有界自共軛运算子的情形那样，而是在整个軸上变化。在講有界及无界的一般自共軛运算子的理論之前，应当介紹一系列的新概念，这些在下面起着很基本的作用，同时并应証明某些簡單的命題。

首先注意，如果 l 是在 H 中到处稠密的綫性簇，而元 z 与 l 正交，那末 z 是零元。事实上，設当 $x\in l$ 时 $(x, z)=0$，并設 y 是 H 中任意元。既然 l 是在 H 中到处稠密的，必在 l 中存在一序列元 x_n，使 $x_n\to y$。依 z 的性質有 $(x_n, z)=0$，而取極限可知 $(y, z)=0$，就是說 z 与 H 中任意元正交，特別是与它自己也正交，就是說 $(z, z)=\|z\|^2=0$，因此 $z=0$。如果 l 不到处稠密，那末显然存在与 l 正交的元 z。在下面，在其上定义某分配运算子 C 的綫性簇表示成 $l(C)$，而凡运算子都設做分配的。

設运算子 A 定义于綫性簇 $l(A)$ 上，而 $l(A)$ 在 H 中到处稠密。作 (Ax, y)，其中 $x\in l(A)$，y 是 H 中任意元。存在一元 y，使 (Ax, y) 对于 $l(A)$ 中任意元 x 都可以表示成下面形式：

$$(Ax, y)=(x, y^*)\quad (x\in l(A)),\tag{1}$$

其中 y^* 表示H中的某元。例如設 $y=0$，則 $(Ax, 0)=(x, 0)$ 对于 $l(A)$ 中任意元 x 成立。如果对于某 y 表現式（1）可能，那末在这

式中 y^* 是唯一的。事实上，如果对于某一 y，有 $(Ax, y)=(x, y_1^*)$，又有 $(Ax, y)=(x, y_2^*)$，这两式对于 $l(A)$ 中一切 x 成立，那末相减可得 $(x, y_1^*-y_2^*)=0$，因而 $y_1^*-y_2^*$ 与綫性簇 $l(A)$ 正交，所以 $y_1^*=y_2^*$。凡使 (Ax, y) 可以表示成(1)这种形式的元 y 的集合显然是一綫性簇 l^*，而在这綫性簇上定义了一个分配运算子，把 y 变換成 y^*。这运算子叫做与 A 共軛的，用記号 A^* 表示，于是 $y^*=A^*y$，而 l^* 是 $l(A^*)$，公式(1)变成下列形式：

$$(Ax, y)=(x, A^*y) \quad (x\in l(A);\ y\in l(A^*))。 \qquad (2)$$

現在介紹閉运算子的概念。运算子 B 叫做閉的，是指它滿足下列条件：如果有任意屬于 $l(B)$ 中的元序列 x_n，并存在極限元 $x_n\Rightarrow x$ 及 $Bx_n\Rightarrow x'$，那末 $x\in l(B)$，且 $Bx=x'$。

不难証明 A^* 永远是閉运算子。事实上，設 $y_n\in l(A^*)$，而 $y_n\Rightarrow y$，$A^*y_n\Rightarrow y'$。依 A^* 的定义：$(Ax, y_n)=(x, A^*y_n)$，其中 $x\in l(A)$，取極限，得：$(Ax, y)=(x, y')$，由此，依 A^* 的定义，可知 $y\in l(A^*)$，而 $y'=A^*y$，就是說 A^* 确是閉运算子。

現在介紹对称运算子的概念。

定义 1. 运算子 A 叫做对称的，是指

$$(Ax, y)=(x, Ay) \quad (x\in l(A);\ y\in l(A)) \qquad (3)$$

对于 $l(A)$ 中任意 x 及 y 成立。

将与以前一样，設 $l(A)$ 在 H 中到处稠密。由(3)可知凡屬于 $l(A)$ 的 y 也屬于 $l(A^*)$，而对于一切如此的 y，$A^*y=Ay$。換句話說，綫性簇 $l(A^*)$ 包括了綫性簇 $l(A)$，而对于 $l(A)$ 中的一切元，运算子 A^* 与 A 相等。如此，綫性簇 $l(A^*)$ 可能較 $l(A)$ 寬广，可能与 $l(A)$ 相等。在后者的情形中对称运算子 A 叫做自共軛的，就是說：

定义 2. 定义于在 H 中到处稠密的綫性簇 $l(A)$ 上的运算子 A 叫做自共軛的，是指 $l(A^*)$ 与 $l(A)$ 重合，而对于凡 $y\in l(A)$，$A^*y=$

$=Ay$。

由上面定义直接可知凡自共軛运算子必是对称的与閉的运算子。下面将会看出，有定义于在 H 中到处稠密的綫性簇 $l(A)$ 上的对称运算子 A，并不是自共軛的。这时 $l(A^*)$ 一定較 $l(A)$ 寬广，而对于凡 $l(A)$ 中的 y，$A^*y=Ay$。

定义 3. 运算子 B 叫做运算子 A 的扩展，是指 $l(B)$ 較 $l(A)$ 寬广（就是說它包含凡 $l(A)$ 中的元，也包含某些其他元），而 $By=Ay$ 对于凡 $l(A)$ 中的 y 成立。

留意这定义与以前所論过的，可知如果 A 是对称的，但不是自共軛运算子，其相应綫性簇是 $l(A)$，在 H 中到处稠密，那末 A^* 是 A 的扩展。但这时 A^* 并不一定是对称运算子了。下面将研究扩展对称运算子仍得对称运算子的可能性問題，特别是扩展对称运算子得出自共軛运算子的可能性問題。

如果运算子 B 与 A 重合，或是 A 的扩展，我們写成 $A\subseteq B$，而如果 B 是 A 的严格扩展，那末我們写成 $A\subset B$。

定理 1。如果綫性簇 $l(A)$ 与 $l(B)$ 在 H 中到处稠密，而 $A\subseteq B$，那末 $B^*\subseteq A^*$。

子空間 $l(B^*)$ 是由凡对于 $l(B)$ 中任意元 x 滿足等式 $(Bx, y)=$ $=(x, y^*)$ 的元 y 組成的，而 $y^*=B^*y$。同样等式（1）定义 $l(A^*)$。但既然 $A\subseteq B$，由对于凡 $x\in l(B)$，$(Bx, y)=(x, y^*)$，可得 $(Ax, y)=(x, y^*)$ 对于凡 $x\in l(A)$ 成立，就是說如果 $y\in l(B^*)$，那末 $y\in l(A^*)$，而 $B^*y=A^*y=y^*$，这正意味着 $B^*\subseteq A^*$。

設 A 是与綫性簇 $l(A)$ 相应的对称运算子，而 $l(A)$ 在 H 中到处稠密。这时 $l(A^*)$ 在 H 中更加是到处稠密的，于是我們可以作与 A^* 共軛的运算子 A^{**}。

定理 2. 如果 A 是与綫性簇 $l(A)$ 相应的对称运算子，而 $l(A)$ 在 H 中到处稠密，那末 $A\subseteq A^{**}\subseteq A^*$。

我們曾看出，$A\subseteq A^*$，而由此，依定理1，可知 $A^{**}\subseteq A^*$。綫性簇 $l(A^{**})$ 中的元 x 由等式 $(A^*y, x)=(y, x^*)$ 定义，而这式对于凡 $y\in l(A^*)$ 成立，而 $x^*=A^{**}x$。如果 $x\in l(A)$，那末依(2)，当設 $x^*=Ax$ 时上面公式滿足，由此可知 $A\subseteq A^{**}$，于是定理証明了。

定理3. 如果 A 滿足上面的条件，那末 A^{**} 是对称的閉运算子，而 $(A^{**})^*=A^*$。

如果 $x\in l(A^*)$，$y\in l(A^{**})$，那末 $(A^*x, y)=(x, A^{**}y)$，就是

$$(A^{**}y, x)=(y, A^*x)\quad (x\in l(A^*);\ y\in l(A^{**}))。\qquad (4)$$

因为 $A^{**}\subseteq A^*$，这等式当 $x\in l(A^{**})$ 时更是正确的，而如果 x 及 y 都 $\in l(A^{**})$，$(A^{**}y, x)=(y, A^{**}x)$，从而証明了 A^{**} 的对称性。它是閉的，因为凡共轭运算子都是閉的。最后，由(4)可知，如果 $x\in l(A^*)$，那末 $x\in l(A^{***})$，而 $A^{***}x=A^*x$，就是說，$A^*\subseteq A^{***}$。另一方面，由 $A\subseteq A^{**}$ 及定理1可知 $(A^{**})^*\subseteq A^*$。与前面关于 A^{***} 的結論結合，可知 $(A^{**})^*=A^*$。

在下几节中，我們將研究自共轭运算子。注意，如果 A 是自共轭运算子，而 a 是实数，那末由定义2可知 aA 是自共轭运算子，定义于 $l(A)$ 上。同样，如果 A 是自共轭运算子，而 B 是有界自共轭运算子（定义于整个 H 上），那末由等式 $(A+B)x=Ax+Bx$ 定义于 $l(A)$ 上的运算子 $A+B$ 是自共轭运算子。事实上，如果对于凡 $l(A)$ 中的 x，$(Ax+Bx, y)=(x, y^*)$，那末，既然 $(Bx, y)=(x, By)$，可知 $(Ax, y)=(x, y^*-By)$，而由 A 的自共轭性可知 $y\in l(A)$，而 $y^*-By=Ay$，就是說 $y^*=(A+B)y$，这正是所要証的。可以証明如果与自共轭的 A 相应的 $l(A)$ 与 H 重合，那末 A 是有界运算子。

155. 自共轭运算子 將与[108]中有界运算子的情形那样来作斯提勒杰斯积分。所謂主單位元分解，是指一族投影运算子 $\mathscr{E}_\lambda$，

这族依从于区間 $(-\infty, +\infty)$ 上的实参数 λ，并且满足下面諸条件：(1)如果 $\mu>\lambda$，那末 $\mathscr{E}_\mu\geq\mathscr{E}_\lambda$；(2)当 $\lambda\to-\infty$ 时 $\mathscr{E}_\lambda$ 趋向于零运算子，而当 $\lambda\to+\infty$ 时 $\mathscr{E}_\lambda\to E$；(3)$\mathscr{E}_\lambda$ 是右連續的，就是說，当 $\lambda\to\to\lambda'+0$ 时，$\mathscr{E}_\lambda\to\mathscr{E}_{\lambda'}$。这时当 $\lambda<\mu$ 时 $\mathscr{E}_\lambda\mathscr{E}_\mu=\mathscr{E}_\mu\mathscr{E}_\lambda=\mathscr{E}_\lambda$，而如果 Δ 是区間 (α, β)，那末令 $\Delta\mathscr{E}_\lambda=\mathscr{E}_\beta-\mathscr{E}_\alpha$，而与以前一样，

$$\Delta'\mathscr{E}_\lambda x\perp\Delta''\mathscr{E}_\lambda x, \tag{5_1}$$

$(\Delta'$ 及 Δ'' 并无公共內点$)$，

$$\Delta'\mathscr{E}_\lambda\cdot\Delta''\mathscr{E}_\lambda=\Delta_0\mathscr{E}_\lambda \tag{5_2}$$

$(\Delta_0$ 是 Δ' 及 Δ'' 的公共部分$)$。

設 δ 是区間 $(-\infty, +\infty)$ 的某分解：

$$\cdots<\lambda_{-2}<\lambda_{-1}<\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots,$$

而諸差 $\lambda_k-\lambda_{k-1}$ $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 的上界 ω_δ 是有穷的，作无穷和

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lambda_k'\Delta_k\mathscr{E}_\lambda x=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lambda_k'(\mathscr{E}_{\lambda_k}-\mathscr{E}_{\lambda_{k-1}})x, \tag{6}$$

其中 $\lambda_{k-1}\leqslant\lambda_k'\leqslant\lambda_k$，而 x 是 H 中的一元。依 (5_1)，这和是由相互正交的元組成的，而这和收斂的必要且充分的条件乃是下面級数收斂[95]：

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lambda_k'^2\|\Delta_k\mathscr{E}_\lambda x\|^2=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lambda_k'^2\Delta_k\|\mathscr{E}_\lambda x\|^2。 \tag{7}$$

这級数正是与积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2d(\mathscr{E}_\lambda x, x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2d\|\mathscr{E}_\lambda x\|^2 \tag{8}$$

相应的和 σ_δ，而我們知道[5] 如果对于某分解 δ 及某些选擇的 λ_k' 級数(7)收斂，那末它对于一切分解及一切选擇 λ_k' 的方法都收斂。这时当 $\omega_\delta\to0$ 时和(7)的極限等于积分(8)，而这积分做为广义积分的存在与和(7)的收斂同效。如此，我們有权去考察对于使級数(7)收斂的元 x 的相应和(6)，而对于这些 x，积分(8)

有有穷值。把这些 x 所組成的集合表成 l。留意 $\|\Delta_k\mathscr{E}_\lambda(x+y)\|^2\leqslant$ $\leqslant(\|\Delta_k\mathscr{E}_\lambda x\|+\|\Delta_k\mathscr{E}_\lambda y\|)^2\leqslant 2\|\Delta_k\mathscr{E}_\lambda x\|^2+2\|\Delta_k\mathscr{E}_\lambda y\|^2$，可以結論如果 $x\in l$ 及 $y\in l$，那末 $x+y\in l$。此外，显然如果 $x\in l$ 而 a 是复数，那末 $ax\in l$，就是說 l 是綫性簇。如果 x 屬于运算子 $\mathscr{E}_\beta-\mathscr{E}_\alpha$ 投影出来的子空間，那末在和(7)中凡与 $\lambda_{k-1}>\beta$ 或 $\lambda_k<\alpha$ 相应的項都等于零，就是說，x 屬于 l。留意当 $\alpha\to-\infty$ 及 $\beta\to+\infty$ 时 $\mathscr{E}_\beta-$ $-\mathscr{E}_\alpha\to E$，可以結論綫性簇 l 在 H 中到处稠密。此外，如果 $x\in l$，那末与在[108]中完全一样，可以証明当 $\omega_\delta\to 0$ 时諸和(6)依在 H 中收斂的意义有确定的極限。这極限很自然地表成斯提勒杰斯积分的形式，而它在綫性簇 l 上定义一个分配运算子 Ax：

$$Ax=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda d\mathscr{E}_\lambda x。\tag{9}$$

如以前一样，用 $l(A)$ 表綫性簇 l。提醒一下，它由凡使积分(9)有有穷值的元 x 組成。取和(6)与其本身的数积，并留意 (5_2)，取極限，可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2 d\|\mathscr{E}_\lambda x\|^2=\|Ax\|^2\quad(x\in l(A)),\tag{10}$$

而这积分是当 $\omega_\delta\to 0$ 时和(7)的極限，或者它也可以了解成具有无穷限的广义积分。取(6)与任意元 y 的数积，并取極限，可得双綫性泛函的表現式：

$$(Ax, y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda d(\mathscr{E}_\lambda x, y)\quad(x\in l(A); y\in H),\tag{11}$$

而上面的积分是当 $\omega_\delta\to 0$ 时相应和 σ_δ 的極限值。如果把 y 换成 $(\mathscr{E}_\beta-\mathscr{E}_\alpha)y$，那末依 (5_2)，可得

$$(Ax, (\mathscr{E}_\beta-\mathscr{E}_\alpha)y)=\int_\alpha^\beta\lambda d(\mathscr{E}_\lambda x, y),$$

而取 $\alpha\to-\infty$ 及 $\beta\to+\infty$ 时的極限，可得

$$(Ax, y)=\lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to+\infty}}\int_\alpha^\beta\lambda d(\mathscr{E}_\lambda x, y),\tag{11_1}$$

就是說积分(11)可以了解成平常的广义斯提勒杰斯积分，而$(\mathscr{E}_\lambda x, y)$是閑变函数。

留意无穷区間$(-\infty, +\infty)$依不减函数$\|\mathscr{E}_\lambda x\|^2$的测度有穷，而积分(8)可以做为无界非負函数$\lambda^2$在有穷测度集合上的勒貝格-斯提勒杰斯积分看待。

設x是H的任意元。这时$(\mathscr{E}_\beta-\mathscr{E}_\alpha)x$屬于$(\mathscr{E}_\beta-\mathscr{E}_\alpha)$投影出来的那个子空間，而在上面已經看出，由此可知对于任意選擇的元x，$(\mathscr{E}_\beta-\mathscr{E}_\alpha)x\in l(A)$。但关于元$\mathscr{E}_\mu x$不能作这样的結論。不过若$x\in l(A)$，就是說，若級数(7)收斂，那末由于$\|\Delta_k\mathscr{E}_\lambda(\mathscr{E}_\mu x)\|=$$=\|\mathscr{E}_\mu\Delta_k\mathscr{E}_\lambda x\|\leqslant\|\Delta_k\mathscr{E}_\lambda x\|$，当換$x$成$\mathscr{E}_\mu x$时級数(7)仍收斂，就是說，如果$x\in l(A)$，那末对于任意$\mu$，$\mathscr{E}_\mu x\in l(A)$。設$x\in l(A)$，在和(6)中把$x$換成$\mathscr{E}_\mu x$，并取$\mu$做为一个分割点$(\mu=\lambda_p)$。这时凡$k>p$的項都变成了零元，而凡$k\leqslant p$时諸項不改变，取極限得

$$A\mathscr{E}_\mu x=\int_{-\infty}^{\mu}\lambda d\mathscr{E}_\lambda x\,。\tag{12}$$

上面的积分是当分解区間$(-\infty, \mu)$为部分而作的和(6)的極限。另一方面，如果把运算子$\mathscr{E}_\mu$用在和(6)上，旣然$\mathscr{E}_\mu$是有界的，从而是連續的，那末在上面关于和中諸項所說的仍然成立，而当$\omega_0\to0$时取極限，注意$\mathscr{E}_\mu$的連續性，得

$$\mathscr{E}_\mu Ax=\int_{-\infty}^{\mu}\lambda d\mathscr{E}_\lambda x\quad(x\in l(A))\,;\tag{12$_1$}$$

与(12)比較，可以写成

$$\mathscr{E}_\mu Ax=A\mathscr{E}_\mu x\quad(x\in l(A))\,。\tag{13}$$

同样，对于任意x，可得

$$A[(\mathscr{E}_\beta-\mathscr{E}_\alpha)x]=\int_\alpha^\beta\lambda d\mathscr{E}_\lambda x\quad(x\in H)\,。\tag{14}$$

如果$x\in l(A)$，那末由(12$_1$)可知：

$$(\mathscr{E}_\beta-\mathscr{E}_\alpha)Ax=\int_\alpha^\beta \lambda d\mathscr{E}_\lambda x \quad (x\in l(A)), \qquad (14_1)$$

于是令 $\alpha\to-\infty$, $\beta\to+\infty$, 可得

$$\int_\alpha^\beta \lambda d\mathscr{E}_\lambda x\Rightarrow Ax, \qquad (15)$$

就是說,积分(9)与(8)一样,也可以看成广义积分。由上面諸公式直接可知:

$$(A\mathscr{E}_\mu x,\ y)=(\mathscr{E}_\mu Ax,\ y)=\int_{-\infty}^{\mu}\lambda d(\mathscr{E}_\lambda x,\ y) \quad (x\in l(A);\ y\in H), \qquad (16_1)$$

$$(A(\mathscr{E}_\beta-\mathscr{E}_\alpha)x,\ y)=\int_\alpha^\beta \lambda d(\mathscr{E}_\lambda x,\ y) \quad (x\in H;\ y\in H), \qquad (16_2)$$

如果不仅 x, 而且 y 也屬于 $l(A)$, 那末把和(7)应用于元 y, 并取它与 x(在左边)的数积,可得

$$(x,\ Ay)=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda d(x,\ \mathscr{E}_\lambda y)。$$

与(11)比較,并留意 $(x,\ \mathscr{E}_\lambda y)=(\mathscr{E}_\lambda x,\ y)$,可得 $(Ax,\ y)=(x,\ Ay)$,就是說, A 是对称运算子。現在証明, A 是自共轭运算子。为此,只須証明如果 $z\in l(A^*)$,那末 $z\in l(A)$。設 δ 是区間 $(-\infty,\ +\infty)$ 的某一分解, 而 P_j 是由投影运算子 $\mathscr{E}_{\lambda_j}-\mathscr{E}_{\lambda_{-j}}$ 定义的子空間。如果 $x\in P_j$, 那末在諸和(6)及(7)中, 凡 $k\geqslant j+1$ 及 $k\leqslant -j$ 的諸項等于零, 而 $x\in l(A)$, 又当 $j+1>k>-j$ 时由投影运算子 $\Delta_k\mathscr{E}_\lambda$ 定义的子空間在 P_j 中,从而和(6)及其極限 Ax 屬于 P_j。由此可知 $Ax\in l(A)$, 而 $A^2x\in P_j$。設 $z\in l(A^*)$, 証明 $z\in l(A)$。設 z_j 是 z 在 P_j 中的投影, 使 $z_j\in l(A)$, 因此 $z_j\in l(A^*)$。这时元 $(z-z_j)$ 也屬于 $l(A^*)$, 并与 P_j 正交。依 A^* 的定义我們有: $(A^2z_j,\ z-z_j)=$ $=(Az_j,\ A^*(z-z_j))$。但 $A^2z_j\in P_j$, 而 $z-z_j$ 与 P_j 正交,所以

$$(Az_j,\ A^*(z-z_j))=0。$$

留意显然的等式

$$(A^*z,\ A^*z)=(A^*(z-z_j),\ A^*(z-z_j))+(A^*z_j,\ A^*z_j)+$$
$$+(A^*(z-z_j),\ A^*z_j)+(A^*z_j,\ A^*(z-z_j)),$$

及上面公式，以及 $A^*z_j=Az_j$，可得

$$\|A^*z\|^2=\|A^*(z-z_j)\|^2+\|Az_j\|^2, \tag{17}$$

由此 $$\|Az_j\|^2\leqslant\|A^*z\|^2。$$

考察当 $x=z_j$ 时的和（7）。其中凡 $k\geqslant j+1$ 及 $k\leqslant -j$ 的項都等于零，而依（5_2），关于其他諸項：

$$\Delta_k\mathscr{E}_\lambda z_j=(\mathscr{E}_{\lambda_k}-\mathscr{E}_{\lambda_{k-1}})(\mathscr{E}_{\lambda_j}-\mathscr{E}_{\lambda_{-j}})z=(\mathscr{E}_{\lambda_k}-\mathscr{E}_{\lambda_{k-1}})z=\Delta_k\mathscr{E}_\lambda z。$$

如此，依（10），和（7）的極限是

$$\|Az_j\|^2=\int_{\lambda_{-j}}^{\lambda_j}\lambda^2 d\|\mathscr{E}_\lambda z\|^2,$$

而依（17），

$$\int_{\lambda_{-j}}^{\lambda_j}\lambda^2 d\|\mathscr{E}_\lambda z\|^2\leqslant\|A^*z\|^2。$$

无限地增大 j，可以看出当 $x=z$ 时积分（8）的值有穷，就是說 $z\in l(A)$，因此 A 是自共軛运算子。

由上面的推理可以得出下面的定理：

定理 1. 凡主單位元分解 $\mathscr{E}_\lambda$ 必有一自共軛运算子 A 与之相应，而 A 对于凡使积分（8）的值有穷的諸元 x 定义。运算子 A 本身定义做和（6）的極限，就是說，等于积分（9）。与它相应的双綫性泛函由公式（11）定义。

可以証明逆定理：

定理 2. 对于任意預定的自共軛运算子 A 必有一主單位元分解 $\mathscr{E}_\lambda$ 存在，使 A 由公式（9）表示。

这定理的証明相当复杂，为了不打断我們的討論，留到后面再証明。在下面举出一公式，依这公式可以依已知的 A 定义 $\mathscr{E}_\lambda$。由这公式可知与不同的 A 相应的 $\mathscr{E}_\lambda$ 是不同的。

运算子 $\mathscr{E}_\lambda$ 叫做自共軛运算子 A 的譜函数。現在簡單地重述一般自共軛运算子的性質，这些与有界自共軛运算子的性質完全相似。

156. 自共軛运算子的連續函数 設 $f(\lambda)$ 是在区間 $(-\infty, +\infty)$ 上的有界一致連續函数(例如 $f(\lambda)$ 在閉区間 $[-\infty, +\infty]$ 上是連續的)。作与(6)相类的和：

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(\lambda_k') \Delta_k \mathscr{E}_\lambda x, \tag{18}$$

其中 x 是 H 中任意元。不难看出，这由相互正交的項組成的級数对于任意 x 都收斂。事实上，依条件 $|f(\lambda)| \leqslant k$，k 是定數，而

$$\left\| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(\lambda_k') \Delta_k \mathscr{E}_\lambda x \right\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(\lambda_k')|^2 \| \Delta_k \mathscr{E}_\lambda x \|^2 \leqslant k^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \| \Delta_k \mathscr{E}_\lambda x \|^2 = \\ = k^2 \|x\|^2, \tag{19}$$

如此与級数(7)相类的級数收斂。与在[108]中完全一样，对于 H 中一切 x，当 $\omega_\delta \to 0$ 时和(18)有确定的極限。这極限表現定义于全 H 上的一个分配运算子 $f(A)$。由(19)直接可知 $\|f(A)x\| \leqslant \leqslant k\|x\|$，就是說 $f(A)$ 是有界运算子。很自然地可以把和(18)的極限写成斯提勒杰斯积分的形式：

$$f(A)x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\mathscr{E}_\lambda x \quad (x \in H), \tag{20}$$

$$(f(A)x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d(\mathscr{E}_\lambda x, y) \quad (x \in H; y \in H)。 \tag{21}$$

最后的积分可以看做是在[4]中定义的平常斯提勒杰斯积分。

与公式(12)及(16)完全同样，有

$$\mathscr{E}_\mu f(A)x = f(A)\mathscr{E}_\mu x = \int_{-\infty}^{\mu} f(\lambda) d\mathscr{E}_\lambda x, \tag{22}$$

及

$$(\mathscr{E}_\mu f(A)x, y) = (f(A)\mathscr{E}_\mu x, y) = \int_{-\infty}^{\mu} f(\lambda) d(\mathscr{E}_\lambda x, y) \tag{23}$$

$$(x \in H; y \in H)。$$

也可以把上面 $f(A)$ 的定义应用到区間 $(-\infty, +\infty)$ 上任意有界連續函数的情形，而不必要求其一致連續性。在下面，將指出有可能把自共軛运算子的函数概念扩展到更寬广的函数类 $f(\lambda)$ 上去。現在来作自共軛运算子 A 的豫解式，我們照着有界自共軛运算子情形所取的路綫來講。

157. 豫解式　与在 [102] 中一样，可以証明运算子 A 的固有值是实数，而与不同的固有值相应的固有元相互正交。如果 x_n 是与同一固有值 λ 相应的固有元序列，而 $x_n \Rightarrow x$，那末由方程 $Ax_n = \lambda x_n$ 及运算子的閉性可知 $x \in l(A)$，而 $Ax = \lambda x$，就是說与同一固有值相应的諸固有元所組成的綫性簇是閉綫性簇，也就是子空間。如果 l 是任意复（或实）数，那末运算子 $(A-lE)$ 的定义域显然与 A 的相同，而运算子 $(A-lE)$ 也是閉运算子。由共軛运算子的定义及 A 的自共軛性可知：$(A-lE)^* = A-\bar{l}E$。关于运算子 $(A-lE)$，有显然的公式成立：

$$(A-lE)\,x = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - l)\, d\mathscr{E}_\lambda x;$$

$$((A-lE)x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - l)\, d(\mathscr{E}_\lambda x, y) \qquad (x \in l(A);\ y \in H)。\quad (24)$$

上写的第一个积分应当了解成关于函数 $(\lambda - l)$ 所作且相似于和 (6) 的那个和的極限。第二积分是广义斯提勒杰斯积分。

数 λ（复的或是实的）叫做运算子 A 的正則点，是指运算子 R_l 存在，定义于整个 H 之上，并有界，而且对于任意元 x，合乎 $R_\lambda x \in l(A)$ 的，下面諸等式也成立：

$$(A-\lambda E) R_\lambda x = x; \quad R_\lambda (A-\lambda E) x = x。\qquad (25)$$
$$(x \in H) \qquad\qquad (x \in l(A))$$

由这些等式可知公式

$$y = (A - \lambda\mathscr{E})x \quad (x \in l(A)) \qquad (26)$$

把 $l(A)$ 一对一地映像于 H 中。如果运算子 R_λ 存在，它叫做 A 的豫解式。运算子 A 的譜是指凡不是 A 的正則点的諸数 λ 所組成的集合。[103]中的定理 14 是成立的，就是說，如果 λ 不是 A 的固有值，那末公式(26)定义一个在 H 中到处稠密的綫性簇。証明与[103]中的一样。注意由 $((A-\lambda E)x, x_0)=0$ 可知 $((A-\lambda E)x, x_0)=(x, 0)$ 如果 $x\in l(A)$，由此，依共軛运算子的定义，可得 $(A--\lambda E)x_0=0$，而进一步的証明与以前的字句都一样了。与在[103]中一样，可以証明条件

$$\|(A-\lambda E)x\|\geqslant p\|x\| \quad (p>0; x\in l(A)) \tag{27}$$

是 λ 为运算子 A 的正則点的必要条件。现在来証明条件(27)的充分性。如果它滿足，那末 λ 不是固有值，而由公式(26)定义的綫性簇 M_λ 在 H 中到处稠密。設 $y_n\in M_\lambda$ 而 $y_n\Rightarrow y$。我們証明 $y\in M_\lambda$，从而 M_λ 是閉綫性簇。因为 $y_n=(A-\lambda E)x_n$，而 $x_n\in l(A)$，依(27)，$\|y_n-y_m\|\geqslant p\|x_n-x_m\|$。但序列 y_n 自收斂，因此序列 x_n 也自收斂，因而存在一元 x，使 $x_n\Rightarrow x$。这样，$x_n\in l(A)$，$(A-\lambda E)x_n=y_n$，$x_n\Rightarrow x$，而 $(A-\lambda E)x_n\Rightarrow y$。既然 A 是閉的，由此可知 $x\in l(A)$，而 $(A-\lambda E)x=y$，就是說 $y\in M_\lambda$。如此 M_λ 既然在 H 中到处稠密，又是閉的，它一定与 H 重合。既然 λ 不是固有值，公式(26)把 $l(A)$ 一对一地映像到 H 中。剩下的只是証明把 H 映像到 $l(A)$ 中的逆运算子 R_λ 是有界的。在(27)中令 $x=R_\lambda x$，可得 $\|R_\lambda y\|\leqslant\frac{1}{p}\|y\|$，由此可知 R_λ 是有界的。与在[103]中一样，可以証明凡非实数 λ 都是正則点。[103]中定理 15 的系也是正确的。

如果 l 不是实数，那末 $1:(\lambda-l)$ 是 λ 的函数，在閉区間 $[-\infty, +\infty]$ 中是連續的。我們可以作有界运算子

$$R_l x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\lambda-l}d\mathscr{E}_\lambda x。 \tag{28}$$

証明它具有当 $\lambda=l$ 时的豫解式的一切性質，于是証明了上面将它

記为 R_l 的合法性。对于任意 x，元 $(\mathscr{E}_\beta-\mathscr{E}_\alpha)R_lx\in l(A)$，而依 (16_2)，

$$((A-lE)(\mathscr{E}_\beta-\mathscr{E}_\alpha)R_lx,\ y)=\int_\alpha^\beta(\lambda-l)d(\mathscr{E}_\lambda R_lx,\ y)。$$

另一方面，依(23)及(28)，

$$(E_\lambda R_lx,\ y)=\int_{-\infty}^\lambda\frac{1}{\mu-l}d(\mathscr{E}_\mu x,\ y)。$$

代入上面公式中，并应用斯提勒杰斯积分的性質[9]，可得

$$((A-lE)(\mathscr{E}_\beta-\mathscr{E}_\alpha)R_lx,\ y)=\int_\alpha^\beta d(\mathscr{E}_\lambda x,\ y)=((\mathscr{E}_\beta-\mathscr{E}_\alpha)x,\ y),$$

而因为 y 是任意的，由此可知

$$(A-lE)(\mathscr{E}_\beta-\mathscr{E}_\alpha)R_lx=(\mathscr{E}_\beta-\mathscr{E}_\alpha)x。\tag{29}$$

作两数列 α_n 及 β_n，使 $\alpha_n\to-\infty$，$\beta_n\to+\infty$，并作元序列 $y_n=(\mathscr{E}_{\beta_n}-\mathscr{E}_{\alpha_n})R_lx$。这样，$y_n\in l(A)$，$y_n\Rightarrow R_lx$，于是依(29)，$(A-lE)y_n\Rightarrow x$。既然 A 是閉的，由此可知对于任意 x，$R_lx\in l(A)$，而 $(A-lE)R_lx=x$。剩下的只是証明(25)中的第二个公式。它直接由下面公式得出：

$$(R_l(A-lE)x,\ y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\lambda-l}d(\mathscr{E}_\lambda(A-lE)x,\ y),$$

及
$$(\mathscr{E}_\lambda(A-lE)x,\ y)=\int_{-\infty}^\lambda(\mu-l)d(\mathscr{E}_\mu x,\ y),$$

这些由公式(21)及(16_1)得出，并設 $x\in l(A)$。

与在[111]中一样，可以証明如果 l 在某区間之内，而 $\mathscr{E}_\lambda$ 在这区間上是定值的，那末豫解式存在，并由公式(28)表示。不必修改也可以重述从前的推理来証明下列事实：如果对于实数 l 豫解式 R_l 存在，那末 l 必位于某区間之内，而 $\mathscr{E}_\lambda$ 在这区間中是定值的。这里应注意：对任何 x，$\Delta\mathscr{E}_\lambda x\in l(A)$[155]。[111]中的定理34的两系也依然有效。与在[112]中完全一样，可以証明，对于任意非

实数 l 及 l_1，豫解式满足下面方程：

$$R_l - R_{l_1} = (l - l_1) R_{l_1} R_l; \tag{30_1}$$

$$R_l^* = R_{\bar{l}}, \tag{30_2}$$

而由 $R_l x = 0$ 可得 $x = 0$。由豫解式决定譜函数的公式仍有效：

$$\frac{1}{2}[(\mathscr{E}_{\lambda-0}x, y) + (\mathscr{E}_\lambda x, y)] =$$

$$= \lim_{\tau \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\lambda} ((R_{\sigma+\tau i} - R_{\sigma-\tau i})x, y) d\sigma_{\circ} \tag{31}$$

与自共轭运算子相应的是确定的譜函数 $\mathscr{E}_\lambda$，而运算子有界的必要且充分的条件乃是 $\mathscr{E}_\lambda$ 只在有穷区間上变化。

再考察与自共轭运算子 A 相逆的运算子存在的問題，而 A 可以是有界的或是无界的。如果 $\lambda = 0$ 不是 A 的固有值，那末 A 把綫性簇 $l(A)$ 一对一地映像到在 H 中到处稠密的綫性簇 M_0 里，所以存在逆运算子 A^{-1}，定义于 M_0 中。我們証明，A^{-1} 是自共轭运算子。用 x 表示 $l(A)$ 的任意元，x' 表示 M_0 中的相应元。設对于某元等式 $(A^{-1}x', u) = (x', v)$ 对于 M_0 的一切 x' 成立。我們应当証明 $u \in M_0$，而 $v = A^{-1}u$。上面的等式可以写成下面形式：$(x, u) = (Ax, v)$，这里 x 是 $l(A)$ 的任意元，面既然 A 是自共轭的，可知 $v \in l(A)$，而 $u = Av$，但由此直接可知 $u \in M_0$，而 $v = A^{-1}u$，这正是所要証的。如果 $\lambda = 0$ 不仅不是固有值，而且不屬于譜，那末 M_0 与 H 重合，而 A^{-1} 是有界自共轭运算子，并与 $\lambda = 0$ 时的豫解式 R_0 相重合，如果 $\lambda = 0$ 不是固有値，但屬于譜，那末 A^{-1} 是无界运算子。

158. 点譜 与在 [118] 中一样，可以証明 $\lambda = \lambda'$ 是 A 的固有值的必要且充分的条件，乃是 $\lambda = \lambda'$ 是 $\mathscr{E}_\lambda$ 的間断点，而这时 $(\mathscr{E}_{\lambda'} - \mathscr{E}_{\lambda'-0})$ 是其固有値子空間中的投影运算子。与一向所做的一样，設 H 是可分空間，可以結論：如果存在固有値，那末它的数目是有

劣的，或可数的。固有值的秩与从前一样地定义，并可設一切固有元組成規格化正交組：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots。 \tag{32}$$

用 λ_k 表示 $\mathscr{E}_\lambda$ 的間断点，用 L_k 表示相应的固有值子空間，而用 $P_{L_k}=\mathscr{E}_{\lambda_k}-\mathscr{E}_{\lambda_k-0}$ 表示在这子空間中的投影运算子，可以作諸 L_k 的正交和：

$$H'=L_1\dot{+}L_2\dot{+}L_3\dot{+}\cdots, \tag{33}$$

而在子空間 H' 中的投影运算子由下面公式表示：

$$P_{H'}=P_{L_1}+P_{L_2}+P_{L_3}+\cdots。 \tag{34}$$

用 μ_k 表示与固有元 x_k 相应的固有值，并証明下面定理：

定理 3. 为了屬于 H' 的元 x，就是表成形式

$$x=\sum_k a_k x_k \tag{35}$$

的元 x 屬于 $l(A)$，必須且只須

$$\sum_k \mu_k^2 |a_k|^2 < +\infty, \tag{36}$$

而如果这条件滿足，那末

$$Ax=\sum_k \mu_k a_k x_k。 \tag{37}$$

如果 $x\in l(A)$，那末元 Ax 依組(32)的傅立叶系数是 $(Ax, x_k)=$ $=(x, Ax_k)=(x, \mu_k x_k)=\mu_k a_k$，所以(36)滿足。反之設条件(36)滿足。这时可以作元

$$x'=\sum_k \mu_k a_k x_k, \tag{38}$$

并用 y_n 表示(35)中級数的部分和，用 y'_n 表級数(38)的部分和，那末 $y_n\in l(A)$，而 $y_n\Rightarrow x$，$Ay_n=y'_n\Rightarrow x'$，既然 A 是閉的，可知 $x\in l(A)$，而 $Ax=x'$，这正是所要証的。如果規格化正交組(32)是完全組，那末我們說 A 有純点譜。在这情形中[114]

$$H'=H;\ P_{H'}=E;\ \mathscr{E}_\lambda=\sum_{\lambda_k\leq\lambda}(\mathscr{E}_{\lambda_k}-\mathscr{E}_{\lambda_k-0}), \tag{39}$$

任意元 x 可以表示成(35)的形式，而为了 $x\in l(A)$，必須且只須成立(36)，而对于 $l(A)$ 中任意元 x，有(37)成立。这时，如果 y 是 H

中任意元，而 $b_k=(y, x_k)$，那末[95]

$$(Ax, y)=\sum_k \mu_k a_k \bar{b}_k; \quad (Ax, x)=\sum_k \mu_k |a_k|^2, \qquad (40)$$
$$(x\in l(A); \quad y\in H)。$$

159. 不变子空間 在論不变子空間之前，必須解釋有界运算子与无界运算子交换的概念。

定义 我們說，有界并到处定义的运算子 B 与无界运算子 A 交换，是指下面条件满足：(1)如果 $x\in l(A)$，那末 Bx 也 $\in l(A)$；(2)如果 $x\in l(A)$，那末 $ABx=BAx$。

如果 A 是有界并到处定义的运算子，那末第一条件不必提出，而得出以前的交换运算子的定义。

定理4. 为了 B 与自共轭运算子 A 交换，必須且只須有一!值，使下面条件满足：

$$BR_l=R_lB。 \qquad (41)$$

留意，B 及 R_l 都是有界运算子，它們的交换以前已有定义[93]。設 B 与 A 交换，而 y 是 H 的任意元。这时 R_ly 及 BR_ly 屬于 $l(A)$，而此外，

$$ABR_ly=BAR_ly。 \qquad (42)$$

但 $(A-lE)R_ly=y$，所以 $AR_ly=(lR_l+E)y$，于是(42)改写成下面形式：

$$ABR_ly=lBR_ly+By, \text{就是說} (A-lE)BR_ly=By。 \qquad (43)$$

把运算子 R_l 应用到上面等式的两边去，可得 $BR_ly=R_lBy$，就是說(41)成立，于是这条件的必要性証明了。

反之，設(41)成立，就是說 $BR_ly=R_lBy$ 对于凡 $y\in H$ 成立。这等式两边都是 $l(A)$ 中的元，因为右边是 $l(A)$ 中的元。当 y 遍表 H 的一切元时，那末 $x=R_ly$ 遍表 $l(A)$ 的一切元，于是由上面等式可知，如果 $x\in l(A)$，那末 $Bx\in l(A)$。把运算子 $(A-lE)$ 应用到这等式的两边上去，可得(43)，于是得(42)，而后者可以改写成

$ABx = BAx$ 的形式，其中 $x \in l(A)$，于是定理証明了。由上面証明的定理可知，如果(41)对于某一 l 值满足，那末它对于任意 l 也满足，只要对于这 l，豫解式存在就够了。

定理 5. 为了 B 与 A 交换，必須且只須对于凡实数 λ，下面条件滿足：

$$B\mathscr{E}_\lambda = \mathscr{E}_\lambda B。 \tag{44}$$

只須証明条件(41)与(44)同效。依(21)及(28)，对于任意元 x 及 y：

$$(BR_l x, y) = (R_l x, B^* y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - l} d(\mathscr{E}_\lambda x, B^* y),$$

就是說，

$$\left.\begin{aligned} (BR_l x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - l} d(B\mathscr{E}_\lambda x, y), \\ (R_l Bx, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - l} d(\mathscr{E}_\lambda Bx, y)。 \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

如果条件(44)滿足，那末等式(45)的右边一样，因此左边也一样，而既然 x 及 y 是任意的，可知条件(41)滿足。反之，如果条件(41)滿足，那末依柯西-斯提勒杰斯积分反演的唯一性[30]，$(B\mathscr{E}_\lambda x, y)$ 及 $(\mathscr{E}_\lambda Bx, y)$ 只能相差常数項，并只能在間断点不同。但当 $\lambda \to -\infty$ 时上面两函数都趋向于零，而在間断点处是右連續的，所以对于任意 x 及 y，$(B\mathscr{E}_\lambda x, y) = (\mathscr{E}_\lambda Bx, y)$，就是說，条件(44)滿足，于是定理証明了。

注意依[155]的結果，对于一切 μ，$\mathscr{E}_\mu$ 与 A 交换。这由定理 5 可以得出。由同定理及(22)可知 $f(A)$ 与 A 交换。現在考察不变子空間。

定义 子空間 L 叫做运算子 A 的不变子空間，是指下面条件滿足：(1)如果 $x \in l(A)$，那末 x 在 L 中的投影属于 $l(A)$；(2)如果 $x \in L$，又 $x \in l(A)$，那末 $Ax \in L$。这时我們說 L 簡約 A。

对于有界并到处定义的运算子，不变子空間的这个定义与以前的[116]相合。但由于在一般情形中上述定义与以前的有別，我們較詳細地証明下列定理：

定理 6. 如果子空間 L 簡約自共軛运算子 A，那末补子空間 $(H-L)$ 也簡約 A。为了 L 簡約自共軛运算子 A，必須且只須投影运算子 P_L 与 A 交換。

設 L 簡約 A，并設 $x\in l(A)$。由显然的公式 $x=P_Lx+P_{H-L}x$ 及 $P_Lx\in l(A)$ 可知 $P_{H-L}x\in l(A)$。为了証明定理的第一部分，只須証明如果 $y\in(H-L)$ 及 $l(A)$，那末 $Ay\in H-L$。設 x 是 $l(A)$ 的任意元。那末 $(P_LAy, x)=(Ay, P_Lx)$。但 $P_Lx\in l(A)$，所以 $(Ay, P_Lx)=(y, AP_Lx)$，就是說，$(P_LAy, x)=(y, AP_Lx)$；$AP_Lx\in L$，因为 L 簡約 A，而 $y\in H-L$，因此 $(y, AP_Lx)=0$，就是說 $(P_LAy, x)=0$；既然綫性簇 $l(A)$ 在 H 中到处稠密，可知 $P_LAy=0$；由此可知 $Ay\in H-L$，于是定理的第一部分証明了。

如果 L 簡約 A，因而 $(H-L)$ 也簡約 A，而如 $x\in l(A)$，那末在公式 $x=P_Lx+P_{H-L}x$ 中两項都屬于 $l(A)$。使用运算子 A，可得 $Ax=AP_Lx+AP_{H-L}x$，而 $AP_Lx\in L$，$AP_{H-L}x\in H-L$，就是說 AP_Lx 是 Ax 在 L 中的投影，因此可以写成：$AP_Lx=P_LAx$ 当 $x\in l(A)$ 时成立。再留意由 $x\in l(A)$ 可知 $P_Lx\in l(A)$，可以結論如果 L 簡約 A，那末 P_L 与 A 交換。反之，設这一条件滿足。这时，由交換性的定义，如果 $x\in l(A)$，那末 $P_Lx\in l(A)$。又如果 x 屬于 L 及 $l(A)$，那末 $Ax=AP_Lx=P_LAx$，就是說，$Ax\in L$，因此 L 簡約 A，于是定理完全証明了。

由剛才証明的定理及定理 5，直接可知为了 L 簡約 A，必須且只須它对于任意 λ 簡約 $\mathscr{E}_\lambda$。

定理 7. 如果相互正交的子空間 $L_k(k=1, 2, \cdots)$ 簡約 A，那末它們的正交和

$$L=L_1\dotplus L_2\dotplus L_3\dotplus\cdots$$

也簡約 A。

依[107]: $$P_L=P_{L_1}+P_{L_2}+\cdots \tag{46}$$

而如果

$$x\in l(A),\ 那末 P_{L_k}x\in l(A),\ AP_{L_k}x=P_{L_k}Ax,\ 而$$
$$P_Lx=\sum_k P_{L_k}x;\ \ P_LAx=\sum_k P_{L_k}Ax。$$

用 P_n 表示投影运算子，等于級数(46)中前 n 項之和，那末 $P_nx\in\in l(A)$，$P_nx\Rightarrow P_Lx$，而 $AP_nx=P_nAx\Rightarrow P_LAx$，由此，既然 A 是閉的，可知 $P_Lx\in l(A)$，而 $AP_Lx=P_LAx$，于是定理証明了。在有穷多項数的情形中定理是显然的。

設 L 簡約自共軛运算子 A，用 $l_L(A)$ 表示凡同时屬于 L 及 $l(A)$ 的元所組成的綫性簇。运算子 A 在 L 中誘导出运算子 A_L 来，而 A_L 定义于 $l_L(A)$ 上，并且当 $x\in l_L(A)$ 时 $A_Lx=Ax$。子空間 L 可以看作是希勒柏特空間，或者是有穷維的。

定理 8. 綫性簇 $l_L(A)$ 在 L 中到处稠密，而 A_L 是在 L 中的自共軛运算子。

設 y 是 L 中的給定元，而 ε 是預定的正数。我們必須証明，必存在 $l_L(A)$ 中的元 x，使 $\|y-x\|\leqslant\varepsilon$。既然 $l(A)$ 在 H 中到处稠密，必存在一个屬于 $l(A)$ 中的元 z，使 $\|y-z\|\leqslant\varepsilon$。这时 $\|P_L(y-z)\|=\|P_Ly-P_Lz\|\leqslant\varepsilon$。但 $P_Ly=y$，而 $P_Lz=x\in l_L(A)$，因为 $z\in l(A)$，而 L 簡約 A，于是定理的第一部分証明了。必須証明，如果对于 $l_L(A)$ 中任意元 x 下面等式成立：

$$(A_Lx,\ y)=(x,\ y^*), \tag{47}$$

其中 $y\in L$，而 $y^*\in L$，那末 $y\in l_L(A)$，而 $y^*=A_Ly$。如果 z 是 $l(A)$ 的任意元，公式 $x=P_Lz$ 給出 $l_L(A)$ 中的元 x，而由(47)可知 $(AP_Lz,\ y)=(P_Lz,\ y^*)$，而依定理 6，$(P_LAz,\ y)=(P_Lz,\ y^*)$，即 $(Az, P_Ly)=(z,\ P_Ly^*)$，而既然 $y\in L$，$y^*\in L$，即 $(Az,\ y)=(z,\ y^*)$；

由此、因为A是自共轭的，可知$y\in l(A)$而$y^*=Ay$。但依条件$y\in L$，因此$y\in l_L(A)$，于是定理証明了。設L簡約A。这时它簡約$\mathscr{E}_\lambda$，而用$A^{(1)}$及$\mathscr{E}_\lambda^{(1)}$表示运算子$A$及$\mathscr{E}_\lambda$在$L$中誘导出来的运算子（$A^{(1)}$与以前的$A_L$相合），可知$\mathscr{E}_\lambda^{(1)}$是$L$中的主單位元分解，而对于$l_L(A)$中的一切$x$，而且只是对于这些元，有

$$A^{(1)}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda d\mathscr{E}_\lambda^{(1)}x,$$

就是說，$\mathscr{E}_\lambda^{(1)}$是$A^{(1)}$在$L$中的譜函数。設$A^{(2)}$及$\mathscr{E}_\lambda^{(2)}$是$A$及$\mathscr{E}_\lambda$在$H-L$中誘导出来的运算子，那末$\mathscr{E}_\lambda^{(2)}$是$A^2$在$(H-L)$中的譜函数。如果$x=x^{(1)}+x^{(2)}$，而$y=y^{(1)}+y^{(2)}$是$x$及$y$在$L$及$H-L$中的分解，其中$x\in l(A)$，那末[116]：

$$Ax=A^{(1)}x^{(1)}+A^{(2)}x^{(2)};\quad \mathscr{E}_\lambda y=\mathscr{E}_\lambda^{(1)}y^{(1)}+\mathscr{E}_\lambda^{(2)}y^{(2)};$$
$$(Ax,\,y)=(A^{(1)}x^{(1)},\,y^{(1)})+(A^{(2)}x^{(2)},\,y^{(2)})。$$

在有穷多或可数无穷多相互正交的簡約A的子空間的情形中，也有相类的公式成立。

160．混合譜的情形 設运算子不是純点的，而有固有元。使用[158]的記号。凡L_k簡約A，它們的正交和H'及其补子空間$H''=H-H'$也簡約A。設A'及A''是A在H'及H''中誘导出来的运算子。运算子A'有純点譜，而其譜函数由公式

$$\mathscr{E}'_\lambda=\sum_{\lambda_k\leqslant\lambda}(\mathscr{E}_{\lambda_k}-\mathscr{E}_{\lambda_k-0}),$$

表示，而运算子A''的譜函数$\mathscr{E}''_\lambda$由公式$\mathscr{E}''_\lambda=\mathscr{E}_\lambda-\mathscr{E}'_\lambda$表示，并且沒有間断点，就是說$A''$有純連續譜。如果$A$是无界运算子，那末运算子$A'$及$A''$中有一个可能是有界的。例如若$\mathscr{E}_\lambda$的一切間断点位于有穷区間上，那末$A'$是有界运算子。与在[118]中完全一样，可以定义点的、極限的、連續的譜，以及譜的凝点。設A有純連續譜，并与在[117]中一样，用C_x表示諸元$\mathscr{E}_\lambda x$的閉綫性簇。我們說A有簡單連續譜，是指存在一元x，使C_x与H重合。这时[115]中

的公式(171)及(178)都成立，其中的黑林格尔积分是在无穷区間上取的，这些积分是把无穷区間分解成有穷多部分区間所得相应和的極限。若 $y\in l(A)$，則[115]中的公式(175)与(177)也成立。相应的积分可以看做是具有无穷积分区間的广义积分。应用不等式[117]

$$|\Delta\varphi_y(\lambda)|^2\leqslant\Delta\rho(\lambda)\cdot\Delta\|\mathscr{E}_\lambda y\|^2,$$

与在[155]中一样，可以証明，相关于和(6)，与积分(177)相应的相互正交元的无穷和是收斂級数，因为 $y\in l(A)$。在連續譜的一般情形中，由[115]中定理38的証明可知对于任意 λ，C_x 簡約 $\mathscr{E}_\lambda$，因此它簡約 A。运算子 A 在 C_x 中誘导出来的运算子有簡單連續譜，而与在[117]中完全一样，可以把具有純連續譜的运算子分解成在相互正交的子空間中具有簡單連續譜的运算子，而这些子空間的正交和是整个 H。在一切公式中，代替一个黑林格尔积分出現的乃是几个这样的积分之和。与在[120]中完全一样，可以找出 C_x 及 $L_2^{(\rho)}$ 間的联系。

設 A 是自共軛运算子，U 是么范的。运算子 $A'=UAU^{-1}$ 定义于綫性簇 $l(A')$ 上，而 $l(A')$ 是由 $l(A)$ 經使用 U 而得来的。我們証明 A' 是自共軛运算子。事实上，設对于 $l(A')$ 中的一切 x，

$$(UAU^{-1}x,\ y)=(x,\ y^*)。$$

应当証明，$y\in l(A')$，而 $y^*=UAU^{-1}y$。上面等式可以改写成下面形式：$(Ax',\ U^{-1}y)=(Ux',\ y^*)$，其中 $x'=U^{-1}x$，或者，写成 $(Ax',\ U^{-1}y)=(x',\ U^{-1}y^*)$ 的形式，由此，旣然 A 是自共軛的，可知 $U^{-1}y\in l(A)$，而 $U^{-1}y^*=AU^{-1}y$，就是說 $y\in l(A')$，而 $y^*=UAU^{-1}y$，这正是所要証的。

令 $\mathscr{E}_\lambda$ 是运算子 A 的譜函数。这时，$\mathscr{E}'_\lambda=U\mathscr{E}_\lambda U^{-1}$ 具有主單位元分解的一切屬性，而 $\|\mathscr{E}'_\lambda x\|=\|\mathscr{E}_\lambda U^{-1}x\|$；如果 $x\in l(A')$，那末 $U^{-1}x\in l(A)$，所以級数

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k'^2 \Delta_k \|\mathscr{E}_\lambda' x\|^2$$

收敛，而与在[155]中一样，和

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k' \Delta_k \mathscr{E}_\lambda' x$$

有極限 $A'x = UAU^{-1}x$，由此看出 $\mathscr{E}_\lambda' = U\mathscr{E}_\lambda U^{-1}$ 是 A' 的譜函数。在[121]中所論关于运算子么范相抵的鑒别法也依然有效。

微分解及微分解的完全組的概念也沒有改变。凡（在空間 H 中）連續的微分解 $x(\lambda)$ 必做形式 $\mathscr{E}_\lambda x$，其中 $x \in l(A)$；这时設 $\lambda \to -\infty$ 时 $x(\lambda) \Rightarrow 0$。

161. 自共轭运算子的函数 如果 $\mathscr{E}_\lambda$ 是自共軛运算子 A 的譜函数，而 $f(x)$ 是区間 $-\infty < \lambda < +\infty$ 中的有界函数，并依所有不減函数 $\|\mathscr{E}_\lambda x\|^2$ 都是可測的，那末与[123]中完全一样，公式

$$(f(A)x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d(\mathscr{E}_\lambda x, y) \quad (x \in H; y \in H) \tag{48}$$

决定一定义于整个 H 中的有界运算子 $f(A)$，这后者具有[123]中所举的一切性質。留意 $f(\lambda)$ 在依一切 $\|\mathscr{E}_\lambda x\|^2$ 測度为零的集合上的值并不影响积分(48)，也更不影响 $f(A)$ 的值。現在把运算子函数 $f(A)$ 的概念推广到具有有穷值且仍依一切 $\|\mathscr{E}_\lambda x\|^2$ 可測的，然而是无界的，实值函数 $f(\lambda)$ 上去。用 $f_N(\lambda)$ 表示截函数，就是說由下面等式定义的函数：如 $|f(\lambda)| \leqslant N$ 时 $f_N(\lambda) = f(\lambda)$，而如 $f_N(\lambda) > N$ 时 $f_N(\lambda) = N$，如果 $f(\lambda) < -N$ 时 $f_N(\lambda) = -N$。对于有界函数 $f_N(\lambda)$，我們可以作有界运算子 $f_N(A)$。这时，依[123]的公式(215)，当 $y = x$ 时，$f_1(A) = f_2(A)$，于是

$$\|f_N(A)x - f_M(A)x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_N(\lambda) - f_M(\lambda)|^2 d\|\mathscr{E}_\lambda x\|^2. \tag{49}$$

如果 $f(\lambda)$ 屬于依 $\|\mathscr{E}_\lambda x\|^2$ 的 L_2，那末，由于 $|f_N(\lambda)| \leqslant |f(\lambda)|$ 而 $f_N(\lambda) \to f(\lambda)$ 依 $\|\mathscr{E}_\lambda x\|^2$ 殆遍成立，当 N 及 $M \to +\infty$ 时右边趋向于

零，就是說，序列 $f_N(A)x$ 自收斂，从而有一極限元，我們用 $f(A)x$ 表示，就是說，当 $N\to+\infty$ 时 $f_N(A)x\Rightarrow f(A)x$，如果

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda)d\|\mathscr{E}_\lambda x\|^2<+\infty。\tag{50}$$

凡滿足这条件的元 x 的集合很自然地表示成 $l[f(A)]$。举出一些結果来，不詳述其証明。

綫性簇 $l[f(A)]$ 在 H 中到处稠密，$f(A)$ 是自共軛运算子，并且下面公式成立：

$$(f(A)x, y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)d(\mathscr{E}_\lambda x, y)\quad (x\in l[f(A)], y\in H)。\tag{51}$$

对于复値函数 $f(\lambda)=f_1(\lambda)+f_2(\lambda)i$，我們使用 $f(A)=f_1(A)+$ $+f_2(A)i$，而綫性簇 $l[f(A)]$ 与以前一样依条件 (50) 以 $|f(\lambda)|^2$ 代換 $f^2(\lambda)$ 而定义。与在[123]中一样，下面結論成立：为使一运算子是自共軛运算子 A 的函数，必須且只須它是閉的，而且它与任意与 A 交換的有界运算子交換。

現在回到两自共軛运算子相交換的問題。如果回忆一下[124]中的定理 48，自然地得出下面定义：我們說，两自共軛运算子 A 与 B 相交換，是指它們的譜函数 $\mathscr{E}_\lambda$ 及 F_μ（都是有界运算子）对于任意 λ 及 μ 都是交換的。由于上面提到的定理，这定义当 A 及 B 是有界运算子时与平常定义同效。如果 A 是无界而 B 是有界的运算子，那末有[159]中的交換定义。不难看出，如果 A 及 B 是自共軛运算子，这定义与剛才下的同效。事实上，依[159]中的定理 5，以前的交換性意义与下面性質同效：即 B 与对于有任意 λ 的 $\mathscr{E}_\lambda$ 交換，而这一事实又与下面性質同效：即对于任意 μ，F_μ 与一切 $\mathscr{E}_\lambda$ 交換，就是說得到新的交換性定义。

由自共軛运算子交換性的新定义出發，可以証明同一自共軛运算子 A 的諸实函数相互交換，而如果諸自共軛运算子 $A_1, A_2, \cdots$ 两两交換，那末它們是同一运算子 A 的函数[比較 124]。

考察无界运算子的和与乘积的概念。运算子$(A+B)x=Ax+$ $+Bx$对所有既屬于$l(A)$又属于$l(B)$的元x都有定义。运算子$(AB)x=A(Bx)$定义于凡使$x\in l(B)$及$Bx\in l(A)$的x处。如果a是任意复数，那末运算子$(aA)x=a(Ax)$定义于$l(A)$上。令A及B是交换的自共軛运算子，而B是定义于整个H上的有界运算子。这时运算子ABx定义于凡使$Bx\in l(A)$的x所組成的綫性簇l'上。依交換性定义，如果$x\in l(A)$，那末$Bx\in l(A)$，就是說$l(A)$含于l'中，但l'可能較$l(A)$寬广。我們証明AB是l'上的自共軛运算子。設当$x\in l'$时$(ABx, y)=(x, y^*)$，因而这等式对于$x\in l(A)$时更成立。我們应当証明，$y\in l'$，而$y^*=ABy$。設$x\in l(A)$。可以把上列等式換成：$(BAx, y)=(x, y^*)$对于凡$x\in l(A)$者成立，而由于B是自共軛有界运算子，对于凡$x\in l(A)$，$(Ax, By)=(x, y^*)$；由此，既然A是自共軛的，可知$By\in l(A)$，而$y^*=ABy$，这正是所要証的。留意如果A及B是无界的交換自共軛运算子，那末AB可能是非自共軛的，但与它共軛的运算子$(AB)^*$則永远是自共軛的。

应用和及乘积的定义于运算子A的冪上。綫性簇$l(A^2)$由凡使$x\in l(A)$及$Ax\in l(A)$的x組成，就是說，$l(A^2)$含于$l(A)$中，也可能是$l(A)$。同样$l(A^3)$由凡使$x\in l(A^2)$及$A^2x\in l(A)$的x所組成，所以$l(A^3)$含于$l(A^2)$中。作$a_0+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_nA^n$形式的多項式显然定义于綫性簇$l(A^n)$上。可以証明这多項式与以前定义的，取函数$f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_n\lambda^n$而定义为运算子$A$的函数相同，而定义了一切多項式的域成綫性簇，并在$H$中到处稠密。

在这里我們結束了自共軛运算子的理論，而在論扩展对称运算子的問題之前，首先考虑自共軛运算子的几个基本例。

162. 乘法运算子 考察区間$(-\infty, +\infty)$上的空間L_2，以及乘自变数的运算子

$$Af(x)=xf(x)。\tag{52}$$

綫性簇 $l(A)$ 由 L_2 中凡使 $xf(x)\in L_2$ 的函数 $f(x)$ 組成，特別是凡只在有穷区間上异于零的函数都屬于 $l(A)$，由此可知綫性簇 $l(A)$ 在 H 中到处稠密。我們証明运算子(52)是自共軛的。我們应当証明，如果 $(Ax, y)=(x, y^*)$ 对于凡 $x\in l(A)$ 成立，那末 $y\in l(A)$，而 $y^*\in Ay$。在現在的情形中对于凡 $f(x)\in l(A)$ 及 L_2 中的某 $\varphi(x)$ 及 $\varphi^*(x)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\overline{\varphi(x)}dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{\varphi^*(x)}dx, \tag{53}$$

而应当証明 $\varphi(x)\in l(A)$，$\varphi^*(x)=x\varphi(x)$。应用 (53) 于 L_2 中的 $f(x)$，設 $f(x)$ 只在有穷区間 $(-a, a)$ 上异于零，而留意这样的函数屬于 $l(A)$：

$$\int_{-a}^{+a} f(x)[\overline{\varphi^*(x)}-\overline{x\varphi(x)}]dx=0,$$

而既然 $f(x)$ 是任意的，由此直接可知[53] $\varphi^*(x)-x\varphi(x)$ 在区間 $(-a, +a)$ 上与零相抵，而既然 a 是任意的，可知那函数在整个区間 $(-\infty, +\infty)$ 上与零相抵；就是說，可以設 $\varphi^*(x)-x\varphi(x)=0$。$\varphi^*(x)\in L_2$，因此 $x\varphi(x)\in L_2$，于是 $\varphi^*(x)=x\varphi(x)$，这正是所要証明的。与在[150]中一样，运算子(52)的譜函数由下面公式定义并表示：

$$\mathscr{E}_\lambda f(x)=\begin{cases} f(x) & \text{如果 } x\leqslant\lambda, \\ 0 & \text{如果 } x>\lambda, \end{cases} \tag{54}$$

而这运算子有分布于区間 $-\infty<\lambda<+\infty$ 上的純連續譜。

运算子 (52) 显然是无界运算子。再留意，凡 $l(A)$ 中的函数 $f(x)$ 在区間 $(-\infty, +\infty)$ 上可和。事实上，令 $xf(x)=\omega(x)$，其中 $\omega(x)\in L_2$。可以写成 $f(x)=\dfrac{1}{x}\omega(x)$；既然 $\dfrac{1}{x}$ 及 $\omega(x)$ 屬于任意区間 $(-\infty, -a)$ 及 (a, ∞) 上的 L_2，而 $a>0$，那末由此可知 $f(x)$ 在区間 $(-\infty, +\infty)$ 上也是可和的。

与在[150]中完全一样，可以考察乘以实值函数的运算子：

$$A'f(x)=\omega(x)f(x),\tag{55}$$

而在 $\omega(x)$ 无界的情形所得的是无界运算子。設为确定起見，$\omega(x)$ 在整个区間 $(-\infty, +\infty)$ 上有界，但可能在有穷多点的任意小鄰域除外。这时，取任意不含上述諸点的閉区間，并与以前一样推理，可知(55)是自共軛运算子。与在[150]一样，它的譜函数由下面公式表示：

$$E'_\lambda f(x)=\begin{cases} f(x) & \text{如果 } \omega(x)\leqslant\lambda, \\ 0 & \text{如果 } \omega(x)>\lambda。\end{cases}\tag{56}$$

例如 $\omega(x)\in L_2$，那末綫性簇 $l(A)$ 包含 L_2 中一切有界函数，而 A' 也是自共軛运算子。留意，对于[161]所举的函数类 $\omega(x)$，运算子 A' 可以看做是乘以自变数的运算子 A 的函数 $\omega(A)$。

163. 微分运算子 設 $\Phi(x)$ 是区間 $(-\infty, +\infty)$ 上 L_2 中絕对連續函数，且其导函数 $\Phi'(x)$ 也屬于 L_2；設 l 为凡这类函数所組成的綫性簇。这綫性簇里的函数由公式

$$\Phi(x)=\Phi(0)+\int_0^x\varphi(t)dt\tag{57}$$

表現，而依定义[74]，$\varphi(x)=\Phi'(x)$。我們証明

$$\lim_{x\to-\infty}\Phi(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=0。\tag{58}$$

在公式(57)中取共軛值，并相乘，可得：

$$|\Phi(x)|^2=\Phi(x)\cdot\overline{\Phi(x)}=|\Phi(0)|^2+\Phi(0)\int_0^x\overline{\varphi(t)}dt+$$
$$+\overline{\Phi(0)}\int_0^x\varphi(t)dt+\int_0^x\varphi(t)dt\cdot\int_0^x\overline{\varphi(t)}dt。\tag{59}$$

既然 $\Phi(x)$ 及 $\varphi(x)$ 屬于 L_2，乘积 $\Phi(x)\overline{\varphi(x)}$ 及 $\overline{\Phi(x)}\varphi(x)$ 都在区間 $(-\infty, +\infty)$ 上可和，而为了变换上式的右边，考察上述两乘积在区間 $[0, x]$ 上的积分和。引用分部积分，可得：

$$\int_0^x\Phi(t)\overline{\varphi(t)}dt+\int_0^x\overline{\Phi(t)}\varphi(t)dt=\int_0^x\Phi(t)d\left[\int_0^t\overline{\varphi(u)}du\right]+$$
$$+\int_0^x\overline{\Phi(t)}d\left[\int_0^t\varphi(u)du\right]=\Phi(x)\int_0^x\overline{\varphi(t)}dt+\overline{\Phi(x)}\int_0^x\varphi(t)dt-$$

$$-\int_0^x \varphi(t)\left[\int_0^t \overline{\varphi(u)}\,du\right]dt-\int_0^x \overline{\varphi(t)}\left[\int_0^t \varphi(u)\,du\right]dt。$$

应用公式(57)及由它取共軛量而得的公式，可得

$$\int_0^x \Phi(t)\overline{\varphi(t)}\,dt+\int_0^x \overline{\Phi(t)}\varphi(t)\,dt=$$

$$=\Phi(0)\int_0^x \overline{\varphi(t)}\,dt+\overline{\Phi(0)}\int_0^x \varphi(t)\,dt+\int_0^x \varphi(t)\,dt\cdot\int_0^x \overline{\varphi(t)}\,dt,$$

而公式(59)可以改写成下面形式：

$$|\Phi(x)|^2=|\Phi(0)|^2+\int_0^x \Phi(t)\overline{\varphi(t)}\,dt+\int_0^x \overline{\Phi(t)}\varphi(t)\,dt。\quad(60)$$

既然 $\Phi(t)\overline{\varphi(t)}$ 及 $\overline{\Phi(t)}\varphi(t)$ 在区間 $(-\infty, +\infty)$ 上可和，右边当 $x\to-\infty$ 及当 $x\to+\infty$ 时有極限，就是說，$|\Phi(x)|^2$ 当 $x\to+\infty$ 及当 $x\to-\infty$ 时都有極限，而既然 $\Phi(x)\in L_2$，由此可知这两个極限都应当是零，就是說(58)成立。如此，如果 $\Phi(x)$ 屬于上述的綫性簇，那末極限条件(58)必然滿足。現在在 l 上定义微分运算子

$$D\Phi(x)=i\varphi(x),\quad(61)$$

上述的綫性簇 l 我們用 $l(D)$ 表示。应用傅立叶变換，比較綫性簇 $l(D)$ 及 $l(A)$，其中 A 是运算子(52)。令

$$\Psi_N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{+N}\Phi(t)e^{ixt}\,dt,\quad \psi_N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{+N}i\varphi(t)e^{ixt}\,dt,\quad(62)$$

其中 $\Phi(t)$ 是 $l(D)$ 中任意函数，并分部积分，可得

$$x\Psi_N(x)-\psi_N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,i}\left[\Phi(N)e^{ixN}-\Phi(-N)e^{-ixN}\right],\quad(63)$$

其中右边依(58)当 $N\to\infty$ 时趋向于零，并且是在整个无穷区間上一致收斂于零的。函数 $\psi_N(x)$ 及 $\Psi_N(x)$ 在无穷区間上依中值趋向于 L_2 中的函数 $\psi(x)$ 及 $\Psi(x)$ [149]。因而在凡有穷区間 $[-a, +a]$ 上一定更是如此，而此外，在这样的区間中 $x\Psi_N(x)$ 依中值收斂于 $x\Psi(x)$。由公式(63)可知对于一切足够大的 N 及任意預知的正数 ε，不等式

$$\int_{-a}^{+a} |x\Psi_N(x)-\psi_N(x)|^2 dx \leqslant \varepsilon$$

满足，而留意在范数号下取極限的可能[94]可知：

$$\int_{-a}^{+a} |x\Psi(x)-\psi(x)|^2 dx \leqslant \varepsilon,$$

由此，既然 ε 及 a 是任意的，可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x\Psi(x)-\psi(x)|^2 dx = 0,$$

就是說，$x\Psi(x)=\psi(x)$，卽

$$x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)e^{ixt}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}i\varphi(t)e^{ixt}dt, \tag{64}$$

这可以写成下面形式

$$T^*(\Phi)=\frac{1}{x}T^*(i\varphi)=f, \tag{65}$$

而既然 $T^*(i\varphi)\in L_2$，我們看出不只是 $f(x)\in L_2$，而且 $xf(x)\in L_2$，就是說 $f(x)\in l(A)$。

現在証明，如果 $f(x)$ 是 $l(A)$ 中任意函数，那末 $T(f)\in l(D)$。既然 $f(x)$ 及 $xf(x)$ 屬于 L_2，可以作 $T(f)$ 及 $T(xf)$。留意(65)，令

$$\left.\begin{aligned}\Phi(x)=T(f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-ixt}dt,\\ i\varphi(x)=T(xf)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)e^{-ixt}dt。\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

再引入函数 $\omega_u(x)$，令它在区間 $[0, u]$ 上等于 1，而在这区間之外等于零。那末

$$T^*(\omega_u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^u e^{ixt}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}xi}(e^{ixu}-1)。$$

既然么范映像 T 不改变数积，可以写成：

$$i\int_0^u \varphi(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)\cdot\frac{1}{(-it)}(e^{-itu}-1)dt。$$

留意(66)中第一公式，依 $f(x)$ 在区間 $(-\infty, +\infty)$ 上的可和性，

[162]，可知：

$$\Phi(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt,$$

可以把上述公式改写成下面形式：

$$i\int_0^u\varphi(t)\,dt=\frac{1}{i}\Phi(0)-\frac{1}{i}\Phi(u),$$

由此可知 $\Phi(x)$ 与 $\varphi(x)$ 由公式(57)联系着，就是說，$\Phi(x)\in l(D)$。由(65)可知 T^* 把 $l(D)$ 中任意元 Φ 映像成 $l(A)$ 中的元 f，而剛才我們証明 T 把 $l(A)$ 中的任意元 f 映像成 $l(D)$ 中的元 Φ。如此，在 $l(A)$ 及 $l(D)$ 之間建立了一对一的对应关系，其中 T 把 $l(A)$ 映像到 $l(D)$ 中，而 T^* 把 $l(D)$ 映像到 $l(A)$ 中。依公式(66)，由 $f(x)$ 到 $xf(x)$ 的变换与 $\Phi(x)$ 到 $i\varphi(x)$ 的变换依这映像相对应，就是說

$$D=TAT^*。\tag{67}$$

由上述結果可得下列定理：

定理 9. 綫性簇 $l(D)$ 在 H 中到处稠密，而运算子 D 是自共軛运算子，依公式(67)与 A 么范相抵。

对于运算子 D 的譜函数 $\mathscr{E}'_\lambda$，公式 $\mathscr{E}'_\lambda=T\mathscr{E}_\lambda T^*$ 成立，其中 $\mathscr{E}_\lambda$ 由公式(54)定义，所以可以写成：

$$\mathscr{E}'_\lambda f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{iyt}dt\right]e^{-ixy}dy \tag{68}$$

即

$$\mathscr{E}'_\lambda f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\lambda}T^*(f)e^{-ixy}dy。\tag{68$_1$}$$

留意(58)，可以斷定，出現于公式(57)的积分当 $x\to-\infty$ 或 $x\to+\infty$ 时趋向于 $-\Phi(0)$，所以公式(57)可以写成形式

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt=-\int_x^{\infty}\varphi(t)\,dt,\tag{69}$$

但不能斷定 $\varphi(t)$ 在无穷区間上的絕对可积分性，而上写的两积分应当了解成当区間无限地扩張时有穷区間上积分的極限。由公式

$D^{-1}\varphi=-i\Phi$ 定义的自共軛运算子 D^{-1} 幷不定义于整个 L_2 上，而只就那些 $\varphi(x)$ 定义，其依公式(57)定义的 $\Phi(x)$ 也屬于 L_2 的。由此可知，$\lambda=0$ 屬于 D 的連續譜。

如果代替(52)而考察运算子(55)，那末运算子 $TA'T^*$ 将是运算子 D 的函数 $\omega(D)$，所以

$$\omega(D)f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(y)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{iyt}dt\right]e^{-ixy}dy。\tag{70}$$

如果 $\omega(x)$ 是无界函数，那末其上定义这运算子的綫性簇可由 $l(A')$ 借助于运算子 T 得出。留意上写的无穷限积分都应当了解成依中值收斂的。运算子 D 及 A 都有簡單連續譜。出現于公式(70)中的函数 $\omega(x)$ 必須滿足[161]中为 $f(\lambda)$ 所陈述的条件。

164. 純点譜的情形 在有穷区間的情形，附以适当的極限条件，則运算子(61)引出了具有純点譜的无界自共軛运算子。首先根据[158]的結果，来作一些总的說明。設有一在区間 $[a, b]$ 上完全的、規格化正交的函数組

$$\Phi_1(x),\ \Phi_2(x),\cdots\tag{71}$$

及一列实数 $\mu_1, \mu_2,\cdots$，这些数中可能有相同的，而 μ_k 及 $\Phi_k(x)$ 叫做相应的。設 $\lambda_1, \lambda_2,\cdots$ 是諸 μ_s 中的不同者，而 L_k 是由凡等于 λ_k 的諸 μ_s 所对应的 $\Phi_s(x)$ 所产生的子空間，而 P_{L_k} 是在 L_k 中的投影运算子。依公式

$$\mathscr{E}_\lambda=\sum_{\lambda_k<\lambda}P_{L_k}$$

定义投影运算子 $\mathscr{E}_\lambda$。于是得一主單位元分解，与自共軛运算子 C 相应，C 具有純点譜，其固有函数是(71)，其固有値是 λ_k，而 $P_{L_k}=\mathscr{E}_{\lambda_k}-\mathscr{E}_{\lambda_k-0}$。如果一切 μ_k 位于一有穷区間上，那末 C 是有界运算子。在相反的情形下，它是无界运算子，定义于綫性簇 $l(C)$ 上，而后者是由 $[a, b]$ 上 L_2 中的函数

$$\Phi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\Phi_k(x)\quad\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2<+\infty\right)\tag{72}$$

組成，但后者尙滿足

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 |a_k|^2 < +\infty, \tag{73}$$

而(72)中的收斂应了解为依中值收斂。如果

$$\Phi(x) \in l(C),$$

那末

$$C\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k a_k \Phi_k(x)。 \tag{74}$$

取区間[0, 1]上的空間 L_2，对凡在区間[0, 1]上絕对連續的函数 $\Phi(x)$ 定义运算子(61)，其导函数是 $\varphi(x) \in L_2$，并滿足边界条件

$$\Phi(1) = e^{i\theta}\Phi(0), \tag{75}$$

其中 θ 是某一实数，显然可以設 $-\pi < \theta \leqslant \pi$。留意，凡在有穷区間上絕对連續的函数显然屬于 L_2，而在所論的情形下，綫性簇 $l(D)$ 由公式(57)所表示并滿足条件(75)的函数組成，其中 $\varphi(x) \in L_2$。积分附有条件(75)的初等微分方程

$$i\Phi'(x) = \lambda\Phi(x),$$

可得所論运算子的固有值及固有函数

$$\mu_k = -\theta - 2k\pi, \quad \Phi_k(x) = e^{-i\mu_k x} \tag{76}$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)。$$

留意当 $\theta = 0$ 时 $\mu_0 = 0$，其他 $\mu_k \neq 0$。如果 $\theta \neq 0$，则一切 $\mu_k \neq 0$。L_2 中任意函数 $f(x)$ 依組 $\Phi_k(x)$ 的傅立叶系数显然与函数 $f(x)e^{-i\theta x}$ 依組 $e^{i2k\pi x}$ 的傅立叶系数相同，而既然后者是完全組，那末(76)也是完全組。設 C 是依上述方式与这完全組相应的自共軛运算子。則它对于滿足条件(73)的元

$$\Phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-i\mu_k x} \quad \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 < +\infty\right), \tag{77}$$

都定义，而对于这些元，

$$C\Phi(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mu_k a_k e^{-i\mu_k x}。\tag{78}$$

我們証明 $l(C)$ 与 $l(D)$ 相合，且 C 与 D 相合。設 $\Phi(x)\in l(C)$，就是說 $\Phi(x)$ 由級数(77)定义，并满足条件(73)。留意

$$|a_k|=|a_k\mu_k|\cdot\frac{1}{|\mu_k|}\leqslant\frac{1}{2}\left[|a_k|^2\mu_k^2+\frac{1}{\mu_k^2}\right],$$

且条件(73)满足，而由 $\frac{1}{\mu_k^2}$ 組成的級数收斂，因 μ_k 由公式(76)定义，可知由 $|a_k|$ 組成的級数收斂，所以級数(77)在区間[0, 1]中絕对并一致收斂，而

$$\Phi(0)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k。\tag{79}$$

此外，留意(73)，可以作 L_2 中的函数：

$$\varphi(x)=-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}i\mu_k a_k e^{-i\mu_k x},$$

并設上写級数是依中値收斂的；然后，既然有可能逐項积分这一級数[59]，并留意(79)，可得公式(57)。边界条件(75)成立，是因为級数(77)依上述情形收斂，而且每个函数 $e^{-i\mu_k x}$ 满足这条件。如此，由 $\Phi(x)\in l(C)$ 可知 $\Phi(x)\in l(D)$。留意上述推理即便在 $\mu_0=0$ 的情形也成立。現在設 $\Phi(x)\in l(D)$，考察 $\mu_0\neq 0$ 的情形。对于出現于公式(61)的函数 $\varphi(x)$，可以写成

$$\varphi(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}b_k e^{-i\mu_k x}\quad\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|b_k|^2<+\infty\right)\tag{80}$$

并积分之，得

$$\Phi(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{-i\mu_k x}+c\quad\left(a_k=\frac{b_k}{-i\mu_k}\right),\tag{81}$$

由此直接可知 a_k 满足条件(73)，因此級数(81)一致收斂。这級数的和满足条件(75)，因此常数 c 等于零，而 $\Phi(x)\in l(C)$。在

$\mu_0=0$ 的情形，由 $\theta=0$ 时的条件(75)，并由(57)，可知 $b_0=0$，而在公式(81)中常数 c 由值 $\Phi(0)$ 决定，而 $\Phi(x)\in l(C)$。如此，綫性簇 $l(C)$ 及 $l(D)$ 相合。如果 $\Phi(x)$ 屬于这綫性簇，那末应用等式 $a_k=$ $=b_k:(-i\mu_k)$，及公式(80)，可得

$$D\Phi(x)=i\varphi(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} ib_k e^{-i\mu_k x}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\mu_k e^{-i\mu_k x}=C\Phi(x),$$

就是說 D 与 C 是同一个运算子。于是得出了下列定理：

定理 10　考察在区間[0, 1]上絕对連續、滿足条件(75)、并在 L_2 中有导函数的函数所組成的綫性簇。定义于这綫性簇上的运算子(61)是具有純点譜的自共軛运算子。其固有值及固有函数由公式(76)定义。条件(73)乃是由級数(77)定义的元屬于 $l(D)$ 的充分必要条件，而如果这条件滿足，那末 $D\Phi(x)$ 由級数(78)定义，而級数(77)在区間[0, 1]上絕对并一致地收斂。

上面的討論也适用于高阶的微分运算子。考察区間[0, 1]上二阶运算子的最簡單情形：

$$D_1\Phi(x)=\Phi''(x)+q(x)\Phi(x), \tag{82}$$

其中 $l(D_1)$ 由下面条件定义，即 $\Phi(x)$ 及 $\Phi'(x)$ 在[0, 1]上絕对連續，$\Phi''(x)\in L_2$，并滿足边界条件

$$\Phi(0)=\Phi(1)=0。 \tag{83}$$

函数 $q(x)$ 設是在区間[0, 1]上連續的。綫性簇 $l(D_1)$ 由公式

$$\Phi(x)=\int_0^x\left[\int_0^y \varphi(t)\,dt\right]dy+ax;\quad a=-\int_0^1\left[\int_0^y \varphi(t)\,dt\right]dy$$

定义，而 $D_1\Phi(x)=\varphi(x)+q(x)\Phi(x)$。設 μ_k 及 $\Phi_k(x)$ $(k=1, 2, \cdots)$ 是运算子(82)的固有值及固有函数，并附有条件(83)，其中 $\Phi_k(x)$ 依[IV;99]組成完全組，而可設零不是固有值。用 $G(x, y)$ 表示运算子(82)在边界条件(83)下的格林函数，可以斷定，对于 $l(D_1)$ 中的任意 $\Phi(x)$，由方程 $D_1\Phi(x)=f(x)$ 可得

$$\Phi(x) = -\int_0^1 G(x, y) f(y) dy, \tag{84}$$

而反之，对于 L_2 中的任意 $f(x)$，上写的 $\Phi(x) \in l(D_1)$ [参看 IV；97]。如果 b_k 是 $f(x)$ 的傅立叶系数,那末 $a_k = b_k : \mu_k$ 是由公式(84)定义的 $\Phi(x)$ 的傅立叶系数，而它們显然滿足条件(73)。反之，如果 a_k 满足条件(73)，而以級数(74)定义 $f(x)$，那末由級数(72)定义的 $\Phi(x)$ 依公式(84)可用 $f(x)$ 表示，并屬于 $l(D_1)$。如此，在所考虑的情形中，D_1 也是具有純点譜的自共軛运算子，而公式(84)定出其逆运算子 D_1^{-1}，定义于整个 L_2 上。

165. 积分运算子 考察区間 $[a, b]$ 上的积分运算子，其核是 $K(x, y)$，滿足条件

$$K(y, x) = \overline{K(x, y)}, \tag{85}$$

且

$$K^2(x) = \int_a^b |K(x, y)|^2 dy < +\infty \quad (K(x) \geqslant 0) \tag{86}$$

对于 $[a, b]$ 中的 x 殆遍成立。相应的运算子

$$\varphi(x) = Kf(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy, \tag{87}$$

对 $[a, b]$ 上 L_2 中那些 $f(x)$ 所組成的綫性簇 $l(K)$ 有定义，只要 $f(x)$ 使公式(87)所定的 $\varphi(x)$ 也屬于 L_2。像[145]中一样，我們再来考察 L_2 中合乎下列条件的函数 $f(x)$ 所組成的綫性簇 l:

$$\int_a^b K(x) |f(x)| dx < +\infty。 \tag{88}$$

我們已經知道，綫性簇 l 是在 L_2 中处处稠密的[145]。現在要証明，如果 $f(x) \in l$，则它更加会屬于 $l(K)$。由此順便可以推出：$l(K)$ 在 L_2 中是处处稠密的。我們可以写出：

$$|\varphi(x)|^2 = \int_a^b K(x, y) f(y) dy \cdot \int_a^b \overline{K(x, t)}\, \overline{f(t)} dt,$$

因而

$$\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx \leqslant \int_a^b \int_a^b \int_a^b |K(x,y)||K(x,t)||f(y)||f(t)|dydtdx, \tag{89}$$

所以只要証明右边的积分，无論依什么次序来积，都是有穷值的；依舒伐尔兹不等式：

$$\int_a^b |K(x,y)||K(x,t)|dx \leqslant \left[\int_a^b |K(x,y)|^2 dx \cdot \int_a^b |K(x,t)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} = K(y)K(t),$$

于是，(89)的右边不大于下列乘积

$$\int_a^b K(y)|f(y)|dy \cdot \int_a^b K(t)|f(t)|dt,$$

而这乘积是有有穷值的，因为 $f(x)\in l$。用 $Af(x)$ 来記公式(87)在綫性簇 l 上所定的那个运算子。不难証明这是个对称运算子，即

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(x,y)f(y)dy\right]\overline{\omega(x)}\,dx = \int_a^b \left[\int_a^b K(x,y)\overline{\omega(x)}dx\right]f(y)dy, \tag{90}$$

只要 $f(x)$ 及 $\omega(x)$ 屬于 l；同时

$$\int_a^b K(x,y)\overline{\omega(x)}dx = \overline{\int_a^b K(y,x)\omega(x)dx}$$

作为 y 的函数，显然是屬于 L_2 的。为証明(90)，只要証明积分

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,y)||f(y)||\omega(x)|dydx \tag{91}$$

不論依什么次序来积都是有穷的。我們先依 x 来积，并应用舒伐尔兹不等式，可知上式不大于

$$\|\omega\| \cdot \int_a^b K(x)|f(x)|dx,$$

而这个量的数值是有穷的，因为 $f(x)\in l$。

由公式(87)定义于綫性簇 l 上的对称运算子 A 决不是自共軛的，而是具有共軛运算子 A^* 的。現在証明 A^* 与同一公式(87)在

綫性簇 $l(K)$ 上所定义的运算子 K 重合，其中 $l(K)$ 是由 L_2 中使 $\varphi(x)\in L_2$ 的那些 $f(x)$ 組成的。設对 l 中的所有 $f(x)$ 公式

$$\int_a^b\left[\int_a^b K(x,y)f(y)dy\right]\overline{\omega(x)}dx=\int_a^b f(x)\overline{\omega^*(x)}dx \qquad (92)$$

成立，其中 $\omega(x)$ 及 $\omega^*(x)\in L_2$。我們所要証明的是

$$\omega^*(x)=\int_a^b K(x,y)\omega(x)dy, \qquad (93)$$

由此也可以得出 $\omega(x)\in l(K)$。以上在証明积分(91)为有穷时，我們只用到函数 $f(x)$ 屬于 l 这一事实。故 (92) 左边的积分可以改变积分次序，于是該式可改写为：

$$\int_a^b f(x)\overline{\left[\omega^*(x)-\int_a^b K(x,y)\omega(y)dy\right]}dx=0。 \qquad (94)$$

由[145]定理 6 的証明过程，立卽可知方括号內的差应等于零，于是便得到(93)。反之，若 $\omega(x)\in l(K)$ 而 $\omega^*(x)$ 由公式(93)表示，則由以上的計算立卽可知公式(92)成立。上面这些論証使我們得到以下的定理：

定理 11. 設 $K(y,x)=\overline{K(x,y)}$ 且条件 (86) 滿足。設 l 是 $[a,b]$ 上 L_2 中合乎条件(88)的那些 $f(x)$ 所組成的綫性簇，而 $l(K)$ 是 L_2 中使公式(87)所定的 $\varphi(x)$ 仍屬于 L_2 的那些函数 $f(x)$ 所組成的綫性簇。这时綫性簇 l 在 L_2 中处处稠密而且包含在綫性簇 $l(K)$ 中。此外又設 A 是由(87)定义在綫性簇 l 上的运算子，K 是由同式定义在 $l(K)$ 上的运算子。这时 A 是对称运算子，且 $A^*=K$。

K 为自共軛运算子的必要条件，乃是它須为对称运算子，卽等式

$$\int_a^b\left[\int_a^b K(y,x)f(x)dx\right]\overline{\omega(y)}\,dy=\int_a^b\left[\int_a^b K(y,x)\overline{\omega(y)}\,dy\right]f(x)dx \qquad (95)$$

应对 $l(K)$ 中的一切 $f(x)$ 及 $\omega(x)$ 成立。現在来証明这也是使 K 为自共轭运算子的充分条件。事实上，設对 $l(K)$ 中的一切 $f(x)$ 有

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(x, y) f(y) dy\right] \overline{\omega(x)}\, dx = \int_a^b f(x) \overline{\omega^*(x)} dx,$$

其中 $\omega(x)$ 及 $\omega^*(x)$ 都屬于 L_2。我們要証明的是：$\omega(x) \in l(K)$ 且公式(93)成立，同时，根据 $l(K)$ 的定义，只要証明(93)就够了。自(93)减去等式(95)并注意(85)，可得(94)；而由于 $f(x)$ 是任意选自 $l(K)$ 且 $l(K)$ 又包含 l，故由此可得(93)。于是，<u>K 为自共轭运算子的必要且充分条件是：对于 $l(K)$ 中的任意 $f(x)$ 及 $\omega(x)$，等</u>式(95)成立。

我們举出核在无穷区間 $(-\infty, +\infty)$ 上依赖于差时的自共轭运算子的几个簡單例子。設 $g(t)$ 是 L_2 中的实値偶函数，定义于所說区間上，而 $f(x)$ 是 L_2 中任一函数。記 $G(t)=T^*(g)$ 及 $F(t)=T^*(f)$。$G(t)$ 是实函数，因 $g(t)$ 是实値偶函数。我們可以写出[149]：

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y) f(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t) F(t) e^{-ixt} dt, \quad (96)$$

而由于 $G(t) \in L_2$ 及 $F(t) \in L_2$，乘积 $G(t)F(t)$ 在区間 $(-\infty, +\infty)$ 上是可和的。設 l' 是 L_2 中使 $G(t)F(t)$ 仍屬于 L_2 的那些函数 $F(t)$ 所組成的綫性簇。我們在[149]中看到，对于 L_2 中在区間 $(-\infty, +\infty)$ 上可和的所有函数，公式(142)表示它們的傅立叶变换。于是在綫性簇 l' 上，(96)的右边就是 $T(GF)$，故 $\varphi(x)$ 应屬于 L_2。再看公式(96)的中間部分，便可知在綫性簇 l_1' 上具核 $g(x-y)$ 的积分运算子（这里 l_1' 是 l' 經映像 T 后得出的），与乘以 L_2 中的函数 $G(t)$ 这一运算么范相抵，因而它是个自共轭运算子。再提醒一下，我們用 $l(K)$ 来記 L_2 中适合下列条件的函数 $f(x)$ 所成的綫性簇，这种 $f(x)$ 使公式(96)所定的 $\varphi(x)$ 也屬于 L_2。由上述論証，我們只能推出 l_1' 包含在 $l(K)$ 中。但可以証明 l_1' 与 $l(K)$ 重合。这一論断与下一論断是等效的：若公式(96)中的 $\varphi(x) \in L_2$，则 $G(t)F(t) \in L_2$。l_1' 之所以与 $l(K)$ 相重合，是由于不可能扩展自共轭运算子而又得出自共轭运算子。底下将証明这样的扩展是不可能的。因此，若 $g(t)$ 是 L_2 中实値偶函数，則以 $g(x-y)$ 为核的积分运算子乃是綫性簇 $l(K)$ 上的自共轭运算子。

166. 对称运算子的封閉 我們現在討論扩展已知对称运算子而不損失其对称性的問題，并研究可能不可能得出这样的自共軛运算子。这里仍如以往，假定綫性簇 $l(A)$ 在 H 中到处稠密。如果 A 是非閉的运算子，那末扩展它的第一步自然是封閉它。考察綫性簇 l'，l' 是由 H 中滿足下列条件的諸 x 組成者，即存在 $l(A)$ 中的元序列 x_n，使 $x_n \Rightarrow x$，而 Ax_n 也有極限，表示成 x'，就是說：

$$x_n \Rightarrow x; \quad Ax_n \Rightarrow x'. \tag{97}$$

我們証明，x' 完全由元 x 决定，就是說，如果存在 $l(A)$ 中的另一元序列 v_n，使 $v_n \Rightarrow x$ 而 $Av_n \Rightarrow v'$，那末 v' 与 x' 相同。事实上，令 $z_n = v_n - x_n$，那末 $z_n \in l(A)$，$z_n \Rightarrow 0$，而 $Az_n \Rightarrow v' - x'$。既然 A 是对称的，$(Az_n, w) = (z_n, Aw)$ 对于 $l(A)$ 中的任意 w 成立，取其極限，$(v' - x', w) = 0$，于是因为 w 組成在 H 中到处稠密的綫性簇，可知 $v' - x' = 0$，这正是所要証的。如此公式(97)在 l' 上定义了一个运算子 $x' = \overline{A}x$。由于 A 的分配性，可知 $\overline{A}$ 也是分配运算子。又如果 $x \in l(A)$，那末在公式(97)中可以取一切 x_n 等于 x，而得 $x' = Ax = \overline{A}x$，就是說 $\overline{A}$ 确是 A 的扩展（如果 A 是閉的，那末 $\overline{A}$ 与 A 相同）。如果 x 及 y 屬于 l'，就是說屬于 $l(\overline{A})$，那末在等式 $(Ax_n, y_n) = (x_n, Ay_n)$ 中取極限，可得 $(\overline{A}x, y) = (x, \overline{A}y)$，就是說，$\overline{A}$ 也是对称运算子。我們証明 $\overline{A}$ 是閉运算子。設 u_n 是 l' 中的元序列，且 $u_n \Rightarrow u$，$\overline{A}u_n \Rightarrow u'$。必須証明，$u \in l'$，而 $u' = \overline{A}u$。由 l' 及 $\overline{A}$ 的定义可知存在 $l(A)$ 中的元序列 t_n，使 $\|u_n - t_n\| \leqslant \varepsilon_n$，$\|\overline{A}u_n - At_n\| \leqslant \varepsilon_n$，其中 $\varepsilon_n > 0$，$\varepsilon_n \to 0$。由公式 $\|u - t_n\| \leqslant \|u - u_n\| + \|u_n - t_n\|$，及 $\|u' - At_n\| \leqslant \|u' - \overline{A}u_n\| + \|\overline{A}u_n - At_n\|$，可知 $t_n \Rightarrow u$，$At_n \Rightarrow u'$，就是說 $u \in l'$，$\overline{A}u = u'$。由 A 到 $\overline{A}$ 的运算，以及运算子 $\overline{A}$ 本身，平常叫做 A 的封閉。我們証明，封閉并不改变共軛运算子，就是說 $(\overline{A})^* = A^*$。上面已知 $A \subseteq \overline{A}$，因此 $(\overline{A})^* \subseteq A^*$，而为了証明我們的断語，只須証明凡 $l(A^*)$ 中的元屬于 $l(\overline{A}^*)$。令 x 是 $l(\overline{A})$ 中任意元。存

在 $l(A)$ 中元序列 x_n，使 $x_n \Rightarrow x$，$Ax_n \Rightarrow \overline{A}x$。依共軛运算子的定义，$(Ax_n, y) = (x_n, A^*y)$，取極限，可得 $(\overline{A}x, y) = (x, A^*y)$，由此可知，依 $l(\overline{A}^*)$ 的定义，$y \in l(A^*)$。

注意，与自共軛运算子的情形(157)一样，对称运算子的固有值都是实数，而如果运算子是閉的，則与一定固有值相应的固有元組成子空間。

167. 閉对称运算子的扩展　在下面研究 A 的扩展时，將設 A 是閉对称运算子。現在証明两个对于以后很重要的基本定理。

定理 1. 依照公式

$$y = (A + iE)x, \tag{98}$$

$$z = (A - iE)x, \tag{99}$$

元 x 組成的綫性簇 $l(A)$ 被一对一地各映像到两个子空間 $L_i(A)$ 及 $L_{-i}(A)$ 上去，其中如果 y 与 z 是这些子空間中的元，并且与 $l(A)$ 中的同一元 x 相应，那末映 y 成 z 的映像 U：

$$z = U(y), \tag{100}$$

把 $L_i(A)$ 一对一地映像成 $L_{-i}(A)$，并且这一映像保持范数及数积不变：

$$\|Uy\| = \|y\|; \quad (Uy_1, Uy_2) = (y_1, y_2)。 \tag{101}$$

因为

$$\|(A + iE)x\|^2 = ((A + iE)x, (A + iE)x) =$$
$$= (Ax, Ax) + i(x, Ax) - i(Ax, x) + (x, x),$$

依 A 的对称性，可知

$$\|(A + iE)x\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2 \quad (x \in l(A))。 \tag{102}$$

現在証明，不同的 x 在公式(98)中定出不同的 y。如果 $l(A)$ 中不同的 x_1 及 x_2 定出同一个 y，那末其差 $x = x_1 - x_2$ 定出 $y = 0$，而应当証明，由 $(A + iE)x = 0$ 可知 $x = 0$。但这由(102)直接可以得出，因为 $\|Ax\|$ 无論如何是非負的。如此，公式(98)把 $l(A)$ 一对一地映

像成一个綫性簇 $L_i(A)$。現在証明它是閉的，就是說，它是子空間。設 $y_n=(A+iE)x_n\Rightarrow y$。应当証明 $y\in L_i(A)$。因为 $y_n-y_m=$ $=(A+iE)(x_n-x_m)$，依(102)，令 $x=x_n-x_m$，可知 $\|y_n-y_m\|\geqslant$ $\geqslant\|x_n-x_m\|$。但由 $y_n\Rightarrow y$ 可知当无限地增大 n 及 m 时 $\|y_n-y_m\|\to 0$，从而由上面不等式可知这时 $\|x_n-x_m\|\to 0$，就是說序列 x_n 自收斂，所以存在元 x，使 $x_n\Rightarrow x$。如此，$x_n\Rightarrow x$ 而 $(A+iE)x_n=y_n\Rightarrow y$，就是說 $x_n\Rightarrow x$ 而 $Ax_n\Rightarrow y-ix$，依 A 的閉性，由此可知 $x\in l(A)$，而 $Ax=$ $=y-ix$，即 $(A+iE)x=y$，就是說 $y\in L_i(A)$，这正是所要証的。同样，由与公式(102)相似的公式

$$\|(A-iE)x\|^2=\|Ax\|^2+\|x\|^2 \qquad (102_1)$$

可知公式(99)把 $l(A)$ 一对一地映像成某一子空間 $L_{-i}(A)$。取 y 及 z，各依(98)及(99)与同一元 x 相应，那末(100)是一完全确定的分配映像，把 $L_i(A)$ 一对一地变换成 $L_{-i}(A)$，而公式(102)及(102_1)可以写成形式：$\|y\|^2=\|Ax\|^2+\|x\|^2$，$\|z\|^2=\|Ax\|^2+\|x\|^2$，就是說 $\|z\|=\|y\|$，即 $\|Uy\|=\|y\|$。公式(101)的第二式与在么范运算子[121]情形的証明完全一样，于是定理証明了。

注意，如果 A 是自共軛运算子，那末，既然 $\pm i$ 是 A 的正則点，$L_i(A)$ 及 $L_{-i}(A)$ 与 H 相合[103]，而 U 是么范映像。如果上述两个子空間，或至少其中一个，不与 H 相合，那末 U 平常叫做等距运算子，就是說，定义于某子空間 L' 并把它一对一地映像成另一子空間上并保持元的范数不变的运算子 U（从而也保持数积不变），叫做等距运算子。把 L'' 映像成 L' 的逆运算子 U^{-1} 显然也是等距运算子。如果 L' 及 L'' 与 H 相合，那末 U 是定义于整个 H 上的么范运算子。公式 $y=Ax+ix$ 及 $Uy=Ax-ix$ 把 $l(A)$ 一对一地各变换成 $L_i(A)$ 及 $L_{-i}(A)$，而由此可得公式

$$x=\frac{1}{2i}(y-Uy);\qquad Ax=\frac{1}{2}(y+Uy),$$

其中第一式把 $L_i(A)$ 一对一地映像成 $l(A)$。如果把 y 換成 $2iy$，这仍不改变綫性簇 $L_i(A)$，那末可得較简的公式：

$$x = y - Uy; \tag{103}$$

$$Ax = i(y + Uy), \tag{104}$$

其中第一式把 $L_i(A)$ 一对一地映像成 $l(A)$，而第二式定出相应元 Ax。留意由公式(103)决定的綫性簇在 H 中是到处稠密的。等距运算子 U 叫做閉对称运算子 A 的凱雷映像。現在証明依熟知意义与前者相逆的定理。

定理 2. 如果 U 是等距运算子，把子空間 L' 映成子空間 L''，而公式(103)对屬于 L' 的 y 决定一 H 中到处稠密的綫性簇 l，那末公式(104)在 l 上定义一閉对称运算子 A，这时 U 是 A 的凱雷映像，而 L' 与 L'' 各等于 $L_i(A)$ 及 $L_{-i}(A)$。

首先应当証明，公式(103)对于 L' 中不同的 y 定出不同的 x，就是說，与以前一样，应当証明由 $y_0 - Uy_0 = 0$ 可知 $y_0 = 0$。作数积 (y_0, x)。如果証明对于 l 中任意 x 这数积等于零，那末既然这綫性簇在 H 中到处稠密，可以断定 $y_0 = 0$：

$$(y_0, x) = (y_0, y - Uy) = (y_0, y) - (y_0, Uy),$$

依 U 的等距性：

$$(y_0, x) = (Uy_0, Uy) - (y_0, Uy) =$$
$$= (Uy_0 - y_0, Uy) = (0, Uy) = 0,$$

这正是所要証的。有了 l 中的一个 x，依公式(103)，可得一确定的 $y \in L'$，而依公式(104)可得一确定的 Ax。如此作出一个分配运算子 A。令 x' 及 x'' 是 l 中两元，而 y' 及 y'' 各是与它們相应的 L' 中元。应用 U 的等距性可得

$$(Ax', x'') = (i(y' + Uy'), y'' - Uy'') =$$
$$= i(y', y'') + i(Uy', y'') - i(y', Uy'') - i(Uy', Uy'') =$$
$$= i(Uy', y'') - i(y', Uy'')。$$

展开$(x', Ax'') = (y'-Uy', i(y''+Uy''))$可得同样結果，就是說$(Ax', x'') = (x', Ax'')$，因此 A 是对称运算子。現在証明 A 是閉的。令 x_n 是 l 中的元，使

$$x_n \Rightarrow x, \quad Ax_n \Rightarrow w_{\circ} \tag{105}$$

应当証明，$x \in l$ 而 $w = Ax$。用 y_n 表示 L' 中与 x_n 相应的元：

$$x_n = y_n - Uy_n; \quad Ax_n = i(y_n + Uy_n), \tag{106}$$

由这些等式可知$y_n = \frac{1}{2i}(Ax_n + ix_n) \Rightarrow \frac{1}{2i}(w+ix)$。为簡便起見，以 y 表示这極限，可以断定 $y \in L'$，因为 L' 是子空間；而 $Uy_n \Rightarrow Uy$，因为U是等距运算子，所以 $\|U(y-y_n)\| = \|y-y_n\|$。在公式(106)中取極限，可得 $x = y - Uy$ 及 $w = i(y+Uy)$，其中 $y \in L'$，就是說 $x \in l$，而 $w = Ax$，这正是所要証的。最后，由公式(103)及(104)把 x 換成 $2ix$ 可得：

$$y = (A+iE)x, \quad Uy = (A-iE)x \quad (x \in l),$$

由此直接可得 U 是 A 的凱需映像，而 L' 及 L'' 各是 $L_i(A)$ 及 $L_{-i}(A)$；定理于是証明了。

証明了的定理使我們直接可以說明扩展閉对称运算子 A 的可能性。設B是这样的扩展(与A不相合)。这时公式

$$y = (B+iE)x; \quad z = (B-iE)x$$

的右边定义于綫性簇$l(B)$上，后者較$l(A)$寬广，而对于$l(A)$中的元 x，这两公式給出公式(98)及(99)右边所給出的同样結果。如此，子空間 $L_i(B)$及$L_{-i}(B)$ 眞正較子空間 $L_i(A)$ 及 $L_{-i}(A)$ 寬广，而如果用V表示运算子B的凱需映像，那末可以断定，V把 $L_i(B)$ 轉換成 $L_{-i}(B)$，而它在 $L_i(A)$上与U相合，就是說，等距运算子V是等距运算子U的扩展。应用定理 2 可以断定，反之，凡等距运算子U扩展而成的等距运算子V依公式

$$x = y - Vy; \quad Bx = i(y+Vy) \quad (y \in l(V)) \tag{107}$$

定出閉对称运算子 B，而 B 是 A 的扩展。依上述，也只有循此途徑才可以得到 A 的扩展，使扩展得出的是閉对称运算子。

如果 A 是自共軛运算子，那末 $L_i(A)$ 及 $L_{-i}(A)$ 是整个 H，而扩展不可能。在[165]中曾引用了这点。

168．亏指数 用 $M_i(A)$ 及 $M_{-i}(A)$ 表示 $L_i(A)$ 及 $L_{-i}(A)$ 的补空間，并用 p 及 q 各表 $M_i(A)$ 及 $M_{-i}(A)$ 的維数。如果，比方說，当 $L_i(A)$ 是整个 H 时，那就沒有 $M_i(A)$，而我們算做 $p=0$。

如果 $M_i(A)$ 是有穷維的，那末 p 是其維数，而如果 $M_i(A)$ 是无穷維的，那末 $p=\infty$①。数偶 (p, q) 决定所謂运算子 A 的亏指数。我們証明关于亏指数的一串簡單定理。

定理3. 为了对称閉运算子 A 是自共軛的，必須且只須其两个亏指数等于零。

如果 A 是自共軛运算子，那末，我們在[167]中已知，公式(98)及(99)把 $l(A)$ 映成 H，所以 $p=q=0$。反之，設 $p=q=0$。这时 $L_i(A)$ 及 $L_{-i}(A)$ 与 H 相合，而 U 是么范运算子（与 U^{-1} 一样都定义在整个 H 上）。設 $(Ax, v)=(x, v^*)$ 对于凡 $l(A)$ 中的 x 成立。必須証明 $v\in l(A)$，而 $v^*=Av$。依(103)及(104)，上面等式可以改写成下面形式：

$$(i(y+Uy), v)=(y-Uy, v^*)$$

卽

$$i(y, v)+i(Uy, v)=(y, v^*)-(Uy, v^*),$$

由此，依 U 的么范性，

$$(y, v^*-U^{-1}v^*+iv+iU^{-1}v)=0,$$

而旣然 y 是任意的，可知 $v^*+iv=U^{-1}(v^*-iv)$。令 $v^*+iv=2iy'$，那末 $v^*-iv=2iUy'$，由此可知 $v=y'-Uy'$，$v^*=i(y'+Uy')$，就是說 $v\in l(A)$，而 $v^*=Av$；定理証明了。

① 譯者注：在某些書中，此 p 为一超穷基数。

在証明下面定理之前，首先說明等距运算子的結构。与在么范运算子的情形一样，可以証明，由子空間 L' 到子空間 L'' 的等距映像可以約化成把 L' 中完全規格化正交組 $x_1, x_2, \cdots$ 变換成 L'' 的同类組 $y_1, y_2, \cdots$ 的映像，这时 $Ux_k = y_k$（H 設是可分的）而

$$U\sum_k a_k x_k = \sum_k a_k y_k。$$

这时，显然，或两子空間都須是无穷維的，或二者須有相同的有穷維数。如果这条件滿足，那末由于坐标基可以随意选擇，可以作无穷多个由 L' 到 L'' 的等距映像。如有一等距运算子 U，把 $L_i(A)$ 映像成 $L_{-i}(A)$，要把它扩展，只能借添加同样多的屬于 $M_i(A)$ 及 $M_{-i}(A)$ 的坐标基，并建立其間的一一对应而得出。由这些考虑直接得出下面的一般定理：

定理 4. 为了可能扩展閉对称运算子 A 而保持其閉性及对称性不变，必須且只須运算子 A 的两个亏指数异于零。如果这条件滿足，那末有无穷多个扩展。为了可能扩展 A 成自共軛运算子，必須且只須 A 的两亏指数相同（异于零），而如果这条件滿足，那末上述的扩展存在无穷多。

我們叙述运算子 A 的扩展的一般程序。由 $M_i(A)$ 及 $M_{-i}(A)$ 中各分出子空間 N_i 及 N_{-i} 来，使二者具有相同維数，作一由 N_i 到 N_{-i} 的等距运算子 V。对于扩展运算子 B 作子空間 $L_i(B)$，定义它为正交和 $L_i(A) \dot{+} N_i = L_i(B)$，从而凡 $L_i(B)$ 中的元 y 可以唯一地表示成形式 $y = y' + y''$，其中 $y' \in L_i(A)$，$y'' \in N_i$。扩展等距运算子 V 由公式 $Vy = Uy' + Vy''$ 定义，其中右边表現了屬于 $L_{-i}(A) + N_{-i}$ 的 Vy 的分解成正交子空間 $L_{-i}(A)$ 及 N_{-i}。依(103)，綫性簇 $l(B)$ 由公式 $x = y' + y'' - Uy' - Vy'' = (y' - Uy') + (y'' - Vy'')$ 定义，其中 $(y' - Uy')$ 是 $l(A)$ 中的任意元，y'' 是 N_i 的任意元，而 $(y'' - Vy'') \in N_{-i}$。把这事实写成形式

$$x_B = x_A + x_{N_i} - Vx_{N_i}。\tag{108}$$

完全一样，公式 (104) 給出 $Bx=i(y'+Uy')+iy''+iVy''$，就是說

$$Bx_B=Ax_A+ix_{N_i}+iVx_{N_i}。 \tag{109}$$

如果 N_i 及 N_{-i} 与 $M_i(A)$ 及 $M_{-i}(A)$ 相合，則上面公式决定了 A 的自共軛扩展。不难証明，x_B 表成和(108)的形式是唯一的。换句話說，应当証明，如果和(108)等于零元，那末其各項也必等于零元。事实上，如果 $x_B=0$，那末 $Bx_B=0$，而由公式(108)及(109)可得 $x_A+x_{N_i}-Vx_{N_i}=0$，$Ax_A+ix_{N_i}+iVx_{N_i}=0$。把第一方程乘上 i，并与第二方程相加，可得 $(A+iE)x_A+2ix_{N_i}=0$；在上写的和中第一項屬于 $L_i(A)$，而第二項与 $L_i(A)$ 正交，由此可知两項都等于零，就是說，$x_{N_i}=0$，因此 $Vx_{N_i}=0$，$x_A=0$，这正是所要証的。

如果两亏指数中有一个等于零，而另一异于零，那末 A 沒有閉对称扩展，而这样的运算子叫做極大的。联系着这一名詞，自共軛运算子旣然是两亏指数都等于零的，因而就叫做超極大的。設 A 的亏指数是 $(1, 1)$，就是說，子空間 $M_i(A)$ 及 $M_{-i}(A)$ 都是一維的，設 v_0 及 w_0 各是这两空間中范数相同的两元，从而其中的元都可分别表示成形式 $v=av_0$ 及 $w=aw_0$，其中 a 是任意复数。設 θ 是区間 $0\leqslant\theta<2\pi$ 中任意給定的实数，公式 $V(av_0)=e^{-i\theta}aw_0$ 定义出一个由 $M_i(A)$ 到 $M_{-i}(A)$ 的等距映像，把这映像添加到映像 U 上去，而 U 是把 $L_i(A)$ 变换成 $L_{-i}(A)$ 的，可得么范运算子 V；由公式(108)及(109)定义出一个自共軛运算子 B，而这一 B 依从于上面数 θ 的选擇。如果 A 的亏指数是 $(2, 2)$，那末选擇 $M_i(A)$ 中相互正交規格化元 v_1，v_2 及 $M_{-i}(A)$ 中的相互正交規格化元 w_1 及 w_2，就可得

$$V(a_1v_1+a_2v_2)=a_1(d_{11}w_1+d_{12}w_2)+a_2(d_{21}w_1+d_{22}w_2),$$

其中 d_{ik} 是二維空間中的某一么范映像的元。补充等距映像 U 成么范的 V，可依公式(108)及(109)仍得自共軛运算子 A。

再証明一定理，給出子空間 $M_i(A)$ 及 $M_{-i}(A)$ 的新特征。

定理 5. $M_i(A)$是运算子 A^* 的与固有值 $\lambda=i$ 相应的固有元所成的子空間，就是說，方程 $A^*x=ix$ 的解的子空間，而 $M_{-i}(A)$ 是方程 $A^*x=-ix$ 的解的子空間。

注意既然 A^* 是閉运算子，与它的某固有值相应的固有元所組成的綫性簇是閉的，就是說它是子空間[157]。子空間 $M_i(A)$ 的元 v 的特征乃是对于 $l(A)$ 中的任意 x, v 与 $(A+iE)x$ 正交，就是說，它的特征是 $((A+iE)x, v)=0$，这可以改写成下面形式：$(Ax, v)=(x, iv)$，其中 x 是 $l(A)$ 中的任意元 x。依 A^* 的定义，上面等式就意味着 $v\in l(A^*)$，而 $A^*v=iv$，于是定理中关于 $M_i(A)$ 的断語已証明了。用同样方法可証关于 $M_{-i}(A)$ 的断語。由定理的証明可知有异于零的亏指数，这是由于运算子 A^* 在 $l(A^*)$ 中已不是对称的，并有固有值 $\pm i$。

可以取上半平面的任意复数 λ 及其共軛数 $\bar\lambda$ 以代替 $\pm i$。这时公式

$$y=(A+\lambda E)x;\quad z=(A+\bar\lambda E)x$$

是映 $l(A)$ 成子空間 $L_\lambda(A)$ 及 $L_{\bar\lambda}(A)$ 的一对一映像，而 $z=Uy$ 是由第一子空間到第二个上的等距映像。补子空間 $M_\lambda(A)$ 及 $M_{\bar\lambda}(A)$ 是方程 $A^*x=-\bar\lambda x$ 及 $A^*x=-\lambda x$ 的解的子空間。上面的討論均仍有效，并可以証明，$M_\lambda(A)$ 及 $M_{\bar\lambda}(A)$ 的維数不依从于 λ 的选擇。

169. 共軛运算子　在定理 5 中建立了所引入的子空間与共軛运算子間的联系。現在澈底地說明綫性簇 $l(A^*)$ 的构成及 A^* 与 A 之間的联系。用 x_A, x_i 及 x_{-i} 各表示 $l(A)$, $M_i(A)$ 及 $M_{-i}(A)$ 中的任意元，下面定理成立：

定理 6. 公式

$$v=x_A+x_i+x_{-i}\tag{110}$$

定出了綫性簇 $l(A^*)$，并且

$$A^*v = Ax_A + ix_i - ix_{-i}。 \tag{111}$$

凡 $l(A^*)$ 中的元由公式(110)唯一表示。

既然 A^* 是 A 的扩展，由定理5直接可知由(110)定出的元 v 屬于 $l(A^*)$，且公式(111)成立。現在証明 v 由公式(110)唯一表現，就是說，由

$$x_A + x_i + x_{-i} = 0, \tag{112}$$

便可知其中各項都等于零元。

使用运算子 A^* 于(112)，可得 $Ax_A + ix_i - ix_{-i} = 0$，再以 i 乘(112)，并与上面等式相加，可得 $(A+iE)x_A + 2ix_i = 0$。这等式左边两項相互正交，因此它們都等于零，就是說 $x_i = 0$。同样以$(-i)$乘(112)可得 $x_{-i}=0$，而由于(112)，$x_A=0$。剩下的是要証明凡 $l(A^*)$ 中的元可以表現成(110)的形式。这样的元的特征乃是对于一切 $l(A)$ 中的 x，等式 $(Ax, v) = (x, v^*)$ 成立，而依(103)及(104)，$(i(y+Uy), v) = (y-Uy, v^*)$，由此可得

$$(Uy, v^* - iv) = (y, v^* + iv) \quad (y \in L_i(A))。 \tag{113}$$

投影到互相正交的子空間中，可以写成

$$v^* - iv = x_{L_{-i}} + x_{-i}; \quad v^* + iv = x_{L_i} + x_i, \tag{114}$$

其中 $x_{L_i} \in L_i(A)$，$x_{L_{-i}} \in L_{-i}(A)$。以此代入(113)并因为 $x_{-i} \perp Uy$，$x_i \perp y$，可得 $(Uy, x_{L_{-i}}) = (y, x_{L_i})$，即令 $x_{L_i} = y'$，$x_{L_{-i}} = Uy''$ 时，其中 y' 及 y'' 屬于 $L_i(A)$，可以写出 $(Uy, Uy'') = (y, y')$；又由于 U 的等距性，可知对于 $L_i(A)$ 中的任意 y，$(y, y''-y') = 0$，特別是 $y = y''-y'$ 时，可得 $y'' = y'$，就是說 $x_{L_i} = y'$，$x_{L_{-i}} = Uy'$。代入(114)并逐項相減那两等式，可得 $v = \frac{1}{2i}(y' - Uy') + \frac{1}{2i}x_i - \frac{1}{2i}x_{-i}$，由此可以把 v 表示成(110)的形式，因为 $\frac{1}{2i}x_i \in M_i(A)$，而 $-\frac{1}{2i}x_{-i} \in M_{-i}(A)$。

由上面証明的定理可得一系。在[154]中曾看出，A^{**} 是閉对

称运算子，而$(A^{**})^*=A^*$。如此，可知綫性簇 $l(A^*)$ 除了用公式(116)給出外，还可以由公式

$$v=x_{A^{**}}+x_i-x_{-i} \tag{115}$$

表現。以前曾知道 $A\subseteq A^{**}$。比較(110)及(115)并留意表現式的唯一性，可以断定 $A=A^{**}$。这里曾假定 A 是閉对称运算子。如果 A 是非閉的对称运算子，上面理論全部适用于其閉包 $\bar{A}$。再留意 $(\bar{A})^*=A^*$，可以断定 $A^{**}=\bar{A}$。这就是說：

定理 7. 如果 A 是对称运算子，其綫性簇 $l(A)$ 在 H 中到处稠密，那末 $A^{**}=\bar{A}$。

再举出定理 6 的一个系。由該定理直接可知，公式

$$w=(A^*-iE)v \tag{116}$$

把元 v 的綫性簇 $l(A^*)$ 变换成 H。事实上，依(110)及(111)可得 $w=(A-iE)x_A-2ix_{-i}$，其中第一項是 $L_{-i}(A)$ 中的任意元，而第二項是补子空間 $M_{-i}(A)$ 中的任意元。如此，如果把(116)看做关于 v 的方程，那末它对于 H 中任意 w 都有解。这时齐次方程 $(A^*-iE)v=0$ 的解組成子空間 $M_i(A)$。如果它不是空的，就是說第一个亏指数 $p\neq 0$，那末对于任意 w 方程(116)有无穷多解 $v=v_0+x_i$，其中 v_0 是(116)的一特解，而 x_i 是 $M_i(A)$ 中的任意元。特解 v_0 的形式如(110)，而由于可能加添 $M_i(A)$ 中任意元到解上去，可以假定 v_0 不含 x_i，就是說，方程(116)的解可以写成下面形式：$v=(x_A+x_{-i})+x_i$，其中 x_A 及 x_{-i} 是确定的元，而 x_i 是任意元。如果 $p=0$，那末 x_i 不見，于是得出一确定的解。完全同样，方程

$$(A^*+iE)v'=w$$

对于 H 中任意 w' 有一般解 $v'=(x'_A+x'_i)+x'_{-i}$，其中 x'_A 及 x'_i 是确定元，而 x'_{-i} 是任意的。如果第二个亏指数 $q=0$，那末 x'_{-i} 項不見。

170. 極大运算子　現在叙述作極大运算子的簡單方法。取 H 中的完全規格化正交組

$$x_1,\ x_2,\ \cdots \tag{117}$$

并定义等距映像 U 如下：$Ux_k=x_{k+1}(k=1,\ 2,\ \cdots)$，就是說对于 H 中任意元 y

$$y=\sum_{k=1}^{\infty}a_k x_k \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2<+\infty\right),$$

我們有：

$$Uy=\sum_{k=1}^{\infty}a_k x_{k+1}.$$

依照[167]中定理2的記号，可知 L' 是 H、L'' 是由(117)中除 x_1 以外的一切坐标基所生成的，如 y 是 H 中任意元，由(103)及(104)定出一个閉对称运算子 A，其亏指数是 $(0,\ 1)$。剩下只是証明由諸元 $y-Uy$ 組成的綫性簇在 H 中到处稠密。为了这点，只須証明存在 $l(A)$ 中的元 x，使对于預定的任意坐标基 x_k，范数 $\|x_k-x\|$ 任意小。作元

$$y=\sum_{s=0}^{m-1}\frac{m-s}{m}x_{k+s},$$

其中 m 是某一正整数。那末

$$x=y-Uy=\sum_{s=0}^{m-1}\frac{m-s}{m}x_{k+s}-\sum_{s=0}^{m-1}\frac{m-s}{m}x_{k+s+1}=$$

$$=x_k-\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}x_{k+s},$$

由此，依畢达哥拉定理及 x_{k+s} 的規格化性，可知

$$\|x_k-x\|^2=\frac{1}{m^2}\sum_{s=1}^{m}\|x_{k+s}\|^2=\frac{1}{m},$$

当无限地增大 m 时，$\|x_k-x\|$ 可以任意小，这正是所要証的。上述这一类型的極大运算子叫做初等对称运算子。如果令 $B=-A$，那末 $l(B)$ 与 $l(A)$ 相同，而公式(98)及(99)改变成 $y=(-B+iE)x$ 及 $z=(-B-iE)x$，由此換 x 成 $-x$，可以看出 $(B+iE)x$ 把綫性

簇 $l(B)$ 变换成子空間 $L_{-i}(A)$ 而 $(B-iE)x$ 把 $l(B)$ 映成 $L_i(A)$，就是說当 A 换成 $-A$ 时 L_i 及 L_{-i} 互换，所以如果 A 是上述具有亏指数 $(0, 1)$ 的运算子，那末 $(-A)$ 的亏指数是 $(1, 0)$。

令 U_0 表把坐标基(117)变换成坐标基 x'_k 的么范运算子。应用上述方法于坐标基 x'_k 上，可得一等距运算子 $U'x'_k=x'_{k+1}$，及一闭对称运算子 A'，而显然 $U'=U_0UU_0^{-1}$，$A'=U_0AU_0^{-1}$，而 $l(A')$ 借运算子 U_0 由 $l(A)$ 得出。可以証明，如果 A 是任意閉对称运算子，但其亏指数是 $(0, q)$，而 $q>0$，那末 H 可以表示成有穷多或无穷多子空間的正交和：$H=L_0\dotplus L_1\dotplus L_2\dotplus\cdots$，其中每个 L_i 簡約 A，而当 $k\geqslant 1$ 的每个 L_k 是无穷維的，由 A 在 L_k 中誘导出来的运算子 A_k 是初等对称运算子；子空間 L_0 可能不在，也可能是无穷維或有穷維的，而在其中誘导出的运算子 A_0 是自共軛运算子。

在亏指数为 $(p, 0)$，$p>0$ 的情形，运算子 A_k 与初等对称运算子只差一符号①。

171. 例 1. 举几个对称运算子的簡單例子。第一个例子，考察半无穷区間 $(0, \infty)$ 上空間 L_2 的微分运算子[163]。取 L_2 中的絕对連續函数綫性簇，其导数也在 L_2 中的，而且滿足边界条件

$$\Phi(0)=0 \tag{118}$$

的，作为綫性簇 $l(D)$。这綫性簇 $l(D)$ 显然可由公式

$$\Phi(x)=\int_0^x \varphi(t)\,dt \quad (\varphi(x) \text{ 及 } \Phi(x)\in L_2) \tag{119}$$

确定。扩展 $\varphi(t)$ 到区間 $(-\infty, 0)$ 上，令它在其上的值为零，并用[163]中的結果，则可断言在无穷远处适合下条件：

$$\lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=0。 \tag{120}$$

运算子 D 的形式是：

$$D\Phi(x)=i\varphi(x)。 \tag{121}$$

現在証明 $l(D)$ 在 L_2 中处处稠密，且 D 是閉对称运算子。为了証明关于 $l(D)$

① 譯者注：参照 Béla v. Sz. Nagy, Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, s. 40。

的断語，只要証明 L_2 中的函数 $f(x)$，跟 $l(D)$ 中所有元都相正交的，必定与零相抵。我們只取这样的 $\Phi(x)$ 作为 $l(D)$ 中的元，使它所对应的 $\varphi(x)$ 在某一有穷区間$[0, a]$之外等于零，且

$$\int_0^a \varphi(t)\,dt = 0。\tag{122}$$

这时，公式(119)所定的 $\Phi(x)$ 在 $x \geqslant a$ 时等于零，因而它显然是属于 L_2 的。所說的正交条件可写为：

$$\int_0^a \Phi(x)\overline{f(x)}\,dx = 0。$$

用 $F(x)$ 来記 $f(x)$ 的原函数，它由(119)型的公式确定，施行分部积分法，并注意 $\Phi(0) = \Phi(a) = 0$，得

$$\int_0^a \varphi(x)\overline{F(x)}\,dx = 0。$$

但 $\varphi(x)$ 是区間$(0, a)$上 L_2 中滿足条件(122)的任意函数，因而可知 $F(x)$ 是常数[53]，而且等于零，因 $F(0) = 0$；所以 $f(x)$ 在区間$(0, a)$上与零相抵[53]，又由于 a 是任意的，故它也在区間$[0, \infty)$上与零相抵，这正是所要証的。設 $\Phi_1(x)$ 及 $\Phi_2(x)$ 是 $l(D)$ 中两个函数，$\varphi_1(x)$ 及 $\varphi_2(x)$ 各是它們在公式(119)中积分号下所对应的函数。施行分部积分法，并对 $\Phi_1(x)$ 及 $\Phi_2(x)$ 应用边界条件(118)及(120)，得出

$$\int_0^\infty i\varphi_1(x)\overline{\Phi_2(x)}\,dx = \int_0^\infty \Phi_1(x)\overline{i\varphi_2(x)}\,dx,$$

这便証明了运算子 D 是对称的。其次，若 $\varphi_n(x) \Rightarrow \varphi_0(x)$，$\Phi_n(x) \Rightarrow \Phi_0(x)$，又 $\varphi_n(x)$，$\Phi_n(x)$，$\varphi_0(x)$，$\Phi_0(x)$ 都属于区間$[0, \infty)$上的 L_2，且

$$\Phi_n(x) = \int_0^x \varphi_n(t)\,dt,$$

那末，规定在区間$(0, x)$上等于 1 而在該区間外等于 0 的一个函数之后，由于在函数 $\varphi_n(x)$ 与这一函数的数积中可取極限，故对一切 x 可得

$$\Phi_n(x) \to \int_0^x \varphi_0(t)\,dt,$$

又由于 $\Phi_n(x)$ 是强收斂于 $\Phi_0(x)$ 的，故可写出[57]：

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi_0(t)\,dt,$$

就是說，$\Phi_0(x) \in l(D)$ 而 $D\Phi_0(x) = i\varphi_0(x)$，这就証明了运算子 D 是封閉的。

为确定共軛运算子 D^*，写出基本等式 $(Dx, y) = (x, y^*)$：

$$\int_0^\infty i\varphi(x)\overline{\Psi(x)}\,dx = \int_0^\infty \Phi(x)\overline{i\psi^*(x)}\,dx,\tag{123}$$

其中 $\Psi(x)$ 及 $\psi^*(x)\in L_2$，且为以后計算方便起見用 $i\psi^*(x)$来記元 y^*。$l(D^*)$ 及 D^* 是这样来确定的：若(123)对 $l(D)$中的所有 $\Phi(x)$ 成立，则 $\Psi(x)\in l(D^*)$ 且 $D^*\Psi(x)=i\psi^*(x)$。先取 $l(D)$ 中这样的元，它們所对应的 $\varphi(x)$ 在区間 $(0,a)$ 外等于零且适合条件(122)。这样就得到

$$\int_0^a i\varphi(x)\overline{\Psi(x)}\,dx=\int_0^a \Phi(x)\overline{i\psi^*(x)}\,dx,$$

再把 $\psi^*(x)$的原函数記为 $\Psi^*(x)$，施行分部积分法，并注意 $\Phi(0)=\Phi(a)=0$，便可写出：

$$\int_0^a\varphi(x)\overline{[i\Psi(x)-i\Psi^*(x)]}\,dx=0。$$

跟以前一样，由此便可知 $\Psi(x)-\Psi^*(x)$ 在区間$[0,a]$上是常数；而又由于 a 是任意的，从而知它在全部区間$[0,+\infty]$上是常数，我們应有：

$$\Psi(x)=C+\Psi^*(x)=C+\int_0^x\psi^*(t)\,dt \tag{124}$$

及 $D^*\Psi(x)=i\psi^*(x)$，且如上面所指出的，$\psi^*(x)$ 及 $\Psi(x)$ 应属于区間$[0,\infty)$上的 L_2。和[163]中一样，由此可知 $\Psi(x)$ 应满足边界条件(120)。这是只对綫性族 $l(D)$ 中的一部分 $\Phi(x)$ 应用公式(123)而得到这一結果的。还待証明的是，若以(124)式代(123)中的 $\Psi(x)$，且 $\psi^*(x)$ 及 $\Psi(x)$ 都屬于 L_2，则公式(123)对 $l(D)$中的一切 $\Phi(x)$都依然成立。这也可以像上面一样，用分部积分法，并对 $\Phi(x)$应用边界条件(118)及(120)以及对 $\Psi(x)$ 应用条件(120)来証。于是，綫性族 $l(D^*)$ 由公式(124)来表示，其中 $\psi^*(x)$ 及 $\Psi(x)$ 应屬于 L_2，而 D^* 乃是以前的微分运算子，即 $D^*\Psi(x)=i\psi^*(x)$。$l(D^*)$ 比 $l(D)$ 寬广，它与后者的差别只在于边界条件(118)可以去掉，从而可知D不是自共軛运算子。現在来确定它的亏指数以及[165]中提过的它所对应的子空間。为此，作与运算子 D^* 的固有值$(\pm i)$相应的固有元子空間 $M_i(D)$ 及 $M_{-i}(D)$，也就是方程

$$D^*\Psi(x)=i\Psi(x); \tag{125_1}$$

$$D^*\Psi(x)=-i\Psi(x) \tag{125_2}$$

的解的子空間。而且从这两个方程还可以直接推出，这时不仅 $\Psi(x)$ 应是絕对連續函数，而且 $D^*\Psi(x)=i\psi^*(x)$ 也是；这就是說，依(124)，$\Psi(x)$ 应是絕对連續函数 $\psi^*(x)$ 的原函数，于是 $\Psi'(x)=\psi^*(x)$，这里 $\Psi'(x)$ 是普通导函数。方程(125)可写为 $\Psi'(x)=\Psi(x)$ 及 $\Psi'(x)=-\Psi(x)$，并得出 $\Psi(x)=Ce^x$ 及 $\Psi(x)=Ce^{-x}$。函数 e^x 不屬于 L_2，但 $e^{-x}\in L_2$；这就是，子空間 $M_i(D)$ 不在，

而 $M_{-i}(D)$ 是函数 Ce^{-x} 的一維子空間，这里 C 是任意复数。于是运算子 D 的亏指数是 $(0, 1)$ 从而它是个極大运算子。$L_i(D)$ 是整个 H，而 $L_{-i}(D)$ 由那些屬于 L_2 且在区間 $(0, \infty)$ 上与 e^{-x} 正交的函数所組成。

若引入拉盖尔函数的規格化正交組 $\varphi_k(x)=e^{-x}p_k(x)$ $(k=0,1,\cdots)$，其中 $p_k(x)$ 是 k 次多項式[III; 223]，則不难証明 $U\varphi_k(x)=\varphi_{k+1}(x)$，其中 U 是将 $L_i(D)$ 映为 $L_{-i}(D)$ 的等距运算子，就是說，D 是初等对称运算子。

2．考察区間[0, 1]上 L_2 中的絕对連續函数，其导数也在 L_2 中且滿足边界条件

$$\Phi(0)=\Phi(1)=0 \tag{126}$$

的，我們对这类函数来考察同一微分运算子。子空間 $l(D)$ 由公式(119)确定，其中 $\varphi(x)$ 屬于区間[0, 1]上的 L_2，而

$$\Phi(1)=\int_0^1\varphi(t)\,dt=0。 \tag{127}$$

完全和上例一样，可以証明：$l(D)$ 在 H 中处处稠密，D 是閉对称运算子，而 $l(D^*)$ 的元由公式(124)所定，其中 $\psi^*(x)$ 屬于区間[0, 1]上的 L_2，就是說，$l(D^*)$ 比 $l(D)$ 寬广，与后者的差别仅在于边界条件(126)可以去掉。在这情形，函数 e^x 及 e^{-x} 屬于区間[0, 1]上的 L_2，于是子空間 $M_i(D)$ 及 $M_{-i}(D)$ 都是一維的。$M_i(D)$ 由函数 Ce^x 組成，而 $M_{-i}(D)$ 由函数 Ce^{-x} 組成。这运算子的亏指数是 $(1, 1)$，因此它可以扩展为自共軛运算子，而这扩展要依賴于任意参数。

如果留意[164]中的結果，則可知在这情形下的扩展，就是把两个边界条件(126)换为一个边界条件 $\Phi(1)=e^{i\theta}\Phi(0)$，这里 θ 是任一預定实数。在扩展了的綫性簇上，运算子 D 仍是微分运算子，而得出的自共軛运算子有純点譜。

172．輔助命題 在研究二阶微分运算子以前，先講几个以后要用到的輔助命題。設 $p(x)$ 是有限閉区間 $[a', b']$ 上的正值函数且具有連續导函数，$q(x)$ 是該区間上的連續实函数。考察齐次方程

$$L(y)=-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y=0。 \tag{128}$$

設 $y(x)$ 在 $[a', b']$ 上殆遍滿足这一方程，且 $y(x)$ 及 $y'(x)$ 在 $[a', b']$ 上絕对連續。由方程(128)本身直接可以看出，$y''(x)$ 是与連續函

数相抵的，即，$y'(x)$ 是連續函数的原函数，故可設 $y(x)$ 是方程(128)的普通解，它有絕对連續的导数 $y'(x)$ 及連續的导数 $y''(x)$，而这里的导数都是普通意义下的导数。我們以后說到的解，也应理解为正是这样的解。若 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 是(128)在区間 $[a', b']$ 上的两个綫性无关解，而

$$\Delta(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' \tag{129}$$

是其朗氏行列式，则 $p(x)\Delta(y_1, y_2)$ 是异于零的常数，而 $c_1y_1+c_2y_2$ 是(128)的一般解；复常数 c_1 及 c_2 由初值条件 $y(c)=\alpha$ 及 $y'(c)=\beta$ 唯一确定，其中 c 是 $[a', b']$ 中的一点。解 y_1 及 y_2 在整个区間 $[a', b']$ 上存在。現在考察非齐次方程

$$L(y) = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y = f(x), \tag{130}$$

其中 $f(x)$ 是 $[a', b']$ 上的可測可和函数。我們仍然考察这样的解 $y(x)$，它以及它的导数 $y'(x)$ 在 $[a', b']$ 上是絕对連續的。如果注意到上面所講的，則可以断言，左右两方都应以相抵意义来理解的这个方程(130)，只可能有一个滿足在 $x=c$ 时初值条件的解，因为凡这种解的差都是方程(128)在零初值条件下的解。应用普通的变动常量法，得出公式

$$y(x) = \frac{1}{k}\int_c^x [y_1(x)y_2(t) - y_1(t)y_2(x)]f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{k}y_1(x)\int_c^x y_2(t)f(t)\,dt - \frac{1}{k}y_2(x)\int_c^x y_1(t)f(t)\,dt, \tag{131}$$

其中 $k=p(x)\Delta(y_1, y_2)$ 是常数。应用絕对連續函数乘积的微分法則[74]，立即可知，公式(131)給出了方程(130)在 $x=c$ 时有零初值条件的解。方程(130)的一般解的形式显然是：

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) +$$

$$+\frac{1}{k}\int_c^x [y_1(x)y_2(t) - y_1(t)y_2(x)]f(t)\,dt, \tag{132}$$

而 c_1 及 c_2 由初值 α 及 β 依公式

$$c_1y_1(c)+c_2y_2(c)=\alpha,\quad c_1y_1'(c)+c_2y_2'(c)=\beta$$

决定。再指出下面这个显然的格林公式：

$$\int_{a'}^{b'}[L(y)\bar{z}-y\overline{L(z)}]dx=[-p(x)y'\bar{z}+yp(x)\bar{z}']_{x=a'}^{x=b'},\qquad(133)$$

这是由分部积分法得来的，同时設其中的 y,z,y',z' 在 $[a',b']$ 上是絕对連續的（这时 y'' 及 z'' 当然是在 $[a',b']$ 上可和的）。引用以下的記号：

$$B_x(y,z)=-p(x)y'(x)\overline{z(x)}+y(x)p(x)\overline{z'(x)}。\qquad(134)$$

現在假設，在一有穷或无穷的开区間 (a,b) 上，$p(x)$ 是正值連續且可微的，$q(x)$ 是連續的。和以上一样，我們可以引入 (a,b) 上的綫性独立解，而若 $f(x)$ 在含于 (a,b) 内的任一有穷区間 $[a',b']$ 上是可和的，則公式(132)給出非齐次方程(130)在 (a,b) 上的一般解，同时，也像以前一样，我們認为所有的解 y 及其 y' 在 (a,b) 上是絕对連續的。特别是，若取一函数 $f_0(x)$，它在含于 (a,b) 内的一有穷区間 $[a',b']$ 之外等于零，在 $[a',b']$ 上可和，且滿足条件

$$\int_{a'}^{b'}y_1(x)\overline{f_0(x)}dx=\int_{a'}^{b'}y_2(x)\overline{f_0(x)}dx=0,\qquad(135)$$

以这函数 $f_0(x)$ 代 $f(x)$，并作非齐次方程(130)在 $c=a'$ 时的解(131)：

$$y_0(x)=\frac{1}{k}\int_{a'}^{x}[y_1(x)y_2(t)-y_1(t)y_2(x)]f_0(t)dt,\qquad(136)$$

則 $y_0(x)$ 在 $[a',b']$ 外等于零，且在 $x=a'$ 及 $x=b'$ 时滿足零初值条件，卽

$$y_0(a')=y_0'(a')=y_0(b')=y_0'(b')=0。\qquad(137)$$

要指出的是，条件(135)等于說 $f_0(x)$ 是与(128)的任一解相正交的。由于(135)中的 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 是实函数，故可将 $\overline{f_0(x)}$ 换为 $f_0(x)$。現在再考察今后将起重要作用的两个綫性簇。設 l' 是具

下列性質的函数 $y(x)$ 所組成的綫性簇：（1）$y(x)$ 及 $y'(x)$ 在 (a, b) 上絕对連續，（2）$y(x)$ 及 $L(y)$ 屬于区間 (a, b) 上的 L_2。

輔助定理 若 $y(x)$ 及 $z(x)$ 屬于 l'，則存在極限：

$$\lim_{a'\to a+0} B_{a'}(y, z) = B_a(y, z); \quad \lim_{b'\to b-0} B_{b'}(y, z) = B_b(y, z), \tag{138}$$

且以下公式成立：

$$\int_a^b [L(y)\bar{z} - y\overline{L(z)}]dx = B_b(y, z) - B_a(y, z)。 \tag{139}$$

我們可以应用公式(133)来写出：

$$\int_{a'}^{b'} [L(y)\bar{z} - y\overline{L(z)}]dx = B_{b'}(y, z) - B_{a'}(y, z)。 \tag{140}$$

由于 $y, z, L(y)$ 及 $L(z)$ 据条件都是屬于 (a, b) 上的 L_2 的，故左边在 $a'\to a+0$ 及 $b'\to b-0$ 时的極限都存在。同时讓 a' 趋于 a 及 b' 趋于 b，便得公式(139)。

引用一个記号来記(139)右边的差：

$$B(y, z) = B_b(y, z) - B_a(y, z) \quad (y \text{ 及 } z \in l')。 \tag{141}$$

再取 l' 中这样的函数 $y(x)$，使其对 l' 中的任何 z 适合

$$B(y, z) = 0 \tag{142}$$

的，幷考察这种 $y(x)$ 所組成的綫性簇 l。这里要指出，当任意选取 $[a', b']$ 及 l 中的 $f_0(x)$ 时，只要 $f_0(x)$ 屬于 $[a', b']$ 上的 L_2，則所有的函数(136)屬于 l，因这时 y 及 $L(y)$ 在 $[a', b']$ 外等于零，且 l 的定义中的条件及条件(142)都滿足。綫族簇 l' 由公式(132)定义，且 $f(x)$ 及 $y(x)$ 应屬于 (a, b) 上的 L_2。为确定 l，則还得加上条件(142)。

定理 1. 为使 L_2 中的某两函数 $z(x)$ 及 $z^*(x)$，对 l 中的任何 $y(x)$ 都滿足方程

$$\int_a^b L(y)\bar{z}\,dx = \int_a^b y\overline{z^*}\,dx, \tag{143}$$

必要且充分的条件是：$z(x) \in l'$ 且 $z^*(x) = L(z)$。

現來証条件的必要性。将(143)应用于 l 中由公式(136)所定的函数 $y_0(x)$，写出

$$\int_a^b f_0\bar{z}dx=\int_a^b y_0\bar{z}^*dx. \tag{144}$$

依公式(131)，取 $c=a'$，作方程 $L(v)=z^*$ 在 $[a', b']$ 上的解：

$$v(x)=\frac{1}{k}\int_{a'}^x [y_1(x)y_2(t)-y_1(t)y_2(x)]z^*(t)dt, \tag{145}$$

且 $v(x)$ 显然屬于有限区間 $[a', b']$ 上的 L_2。

对 $y_0(x)$ 及 $v(x)$ 应用公式(133)并留意(137)，得：

$$\int_{a'}^{b'} f_0\bar{v}dx=\int_{a'}^{b'} y_0\bar{z}^*dx,$$

再把它从(144)中减掉，得

$$\int_{a'}^{b'} f_0\overline{(z-v)}dx=0, \quad 即 \quad \int_a^b (z-v)\bar{f}_0dx=0.$$

但 $f_0(x)$ 是 $[a', b']$ 上 L_2 中正交于二維子空間 $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ 的任一元，故在 $[a', b']$ 上 $z(x)-v(x)$ 屬于这一子空間，即 $z(x)-$ $-v(x)$ 乃是齐次方程(128)在区間 $[a', b']$ 上的解；由此可知，$z(x)$ 是方程 $L(z)=z^*(x)$ 在 $[a', b']$ 上的解，于是，由于 (a, b) 內的区間 $[a', b']$ 是任意的，故又可知 $z(x)\in l'$ 及 $z^*=L(z)$；定理中所述条件的必要性于是証明了。反之，如果这条件滿足，即若 $z(x)\in l'$ 且 $z^*=L(z)$，那末只要注意到，$z(x)\in l'$ 时 l 中的任何元 $y(x)$ 滿足条件(142)，便可自(133)立即推出公式(143)；于是定理証明了。

173. 二阶綫性运算子 用 A 来記 l 上由公式 $Ay(x)=L(y)$ 所定的运算子，用 B 来記 l' 上由同一公式 $By(x)=L(y)$ 所定的运算子，并来証明对今后很重要的下一定理：

定理 2. A 是閉对称运算子，亏指数为 (p, p)，其中 $p=0$ 或 1 或 2，且 $B=A^*$。

先証明綫性簇 l 在 L_2 中处处稠密。設 L_2 中的 $z^*(x)$ 与 l 正

交。要証明 $z^*(x)$ 与零相抵。由于对这样的 $z^*(x)$ 公式(143)的右边对 l 中的任何 $y(x)$ 都等于零，故若設 $z(x)\equiv 0$，則由此而依定理1可得 $z^*(x)=L(0)=0$，这正是所要証的。其次，若 $y(x)$ 及 $z(x)$ 屬于 l，則等式(142)成立，于是公式(139)的左边等于零，这就給出了运算子 A 的对称性。由共軛运算子的定义及定理1，立即可知 $B=A^*$。現在来証明运算子 A 是封閉的。我們知道，若 A 是对称运算子，必有：$A\subseteq A^{**}\subseteq A^*$[154]，而代替 l 及 l' 的，照常可写 $l(A)$ 及 $l(A^*)$。为使 L_2 中的 $w(x)$ 屬于 $l(A^{**})$，必要且充分的条件是等式

$$\int_b^a L(z)\overline{w}\,dx-\int_a^b z\overline{w}^*\,dx=0, \tag{146}$$

其中 $z(x)$ 是 $l(A^*)$ 中的任意元，$w^*\in L_2$，且这时 $w^*(x)=A^{**}w(x)$。而由于 $A^{**}\subseteq A^*$，这就是說 $w^*(x)=L(w)$，于是 $w\in l(A^*)$。依(139)，由此可知，对 $l(A^{**})$ 中的任意 $w(x)$，等式 $B(w,z)=0$ 滿足，这里 $z(x)$ 是 $l(A^*)$ 中的任意元。于是依 $l(A)$ 的定义而知 $w(x)\in l(A)$，而由 $A\subseteq A^{**}$ 立即可知 A^{**} 与 A 重合，故 A 是閉运算子[169]。子空間 $M_i(A)$ 及 $M_{-i}(A)$ 是方程 $L(u)=\pm iu$ 的屬于 L_2 的解的子空間，这两个方程的形式是

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right]+[q(x)-i]u=0; \tag{147_1}$$

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right]+[q(x)+i]u=0。 \tag{147_2}$$

若 $u(x)$ 是其中一个方程的解，則由于 $p(x)$ 及 $q(x)$ 是实函数，$\overline{u(x)}$ 必是另一方程的解；而其中一个方程的解的任一子空間，若将其中的所有函数都換成共軛函数，便变成另一方程的解的子空間。可能出現三种情形：(1)上述方程根本沒有 L_2 中的解。这时运算子 A 的亏指数是(0, 0)。(2)这两方程有 L_2 中的解，且其解各組成一維子空間 $cu(x)$ 及 $c\overline{u(x)}$，这里 c 是任意复常数。这时的亏指数

是(1, 1)。(3)上述方程的所有解都屬于 L_2, 这时运算子 A 的亏指数是(2, 2);定理于是証明了。

用[168]中的公式(108)及(109),使我們在第二及第三两种情形下有可能作出 A 的所有扩展自共軛运算子。当亏指数为(1, 1)时,取方程(147_1)的屬于 L_2 的規格化解 $u(x)$。則 $\overline{u(x)}$ 将是方程(147_2)的同样的解。选取区間 $0 \leqslant \theta < 2\pi$ 中的数 θ 并引入等距映像 $Vu(x) = e^{-i\theta}\overline{u(x)}$, 卽可写出綫性簇 $l(C_\theta)$ 中元的公式(其中 C_θ 是 A 的扩展自共軛运算子):

$$y_{C_\theta}(x) = y_A(x) + \alpha u(x) - e^{-i\theta}\overline{\alpha u(x)}, \tag{148}$$

且

$$C_\theta y_{C_\theta}(x) = L(y_{C_\theta}) = L(y_A) + i\alpha u(x) + ie^{-i\theta}\overline{\alpha u(x)}, \tag{149}$$

其中 α 是任意复数, $y_A(x)$ 是 $l(A)$ 中任意元。把乘以乘积 $2ie^{-i\frac{\theta}{2}}$ 后的 α 仍記为 α, 可写出:

$$y_{C_\theta}(x) = y_A(x) + \alpha u_\theta(x), \tag{150}$$

其中的实函数 $u_\theta(x)$ 由下式确定:

$$u_\theta(x) = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}u(x) - e^{-i\frac{\theta}{2}}\overline{u(x)}}{2i}。 \tag{151}$$

可以指出,依(110), 綫性簇 $l(B) = l(A^*)$ 中的元由公式

$$y_B(x) = y_A(x) + \alpha u(x) + \beta\overline{u(x)} \tag{152}$$

确定,其中 α 及 β 是任意复数。完全相似地,在亏指数为(2, 2)的情形,任取方程(147_1)的規格化正交解 $u_1(x)$ 及 $u_2(x)$ 以及二維么矩陣 D 中的元素 d_{ik}, 可写出以下公式,来表示綫性簇 $l(C_D)$ 中的元,其中 C_D 也是 A 的扩展自共軛运算子:

$$y_{C_D}(x) = y_A(x) + \alpha u_1(x) + \beta u_2(x) - \alpha[d_{11}\overline{u_1(x)} + d_{12}\overline{u_2(x)}] - \\ - \beta[d_{21}\overline{u_1(x)} + d_{22}\overline{u_2(x)}]。$$

亏指数为(0, 0)时, $l(A^*)$ 与 $l(A)$ 重合,运算子 B 与 A 重合而且是自共軛运算子。

現在对亏指数为(1, 1)的情形再作一补充說明，

定理 3. 亏指数为(1, 1)时，綫性簇 $l(A)$ 由 $l(A^*)$ 中适合如下条件的函数 $y(x)$ 所組成：$B(y, u)=B(y, v)=0$，而綫性簇 $l(C_\theta)$ 由条件 $B(y, u_\theta)=0$ 确定。

依(142)及(110)，綫性簇 $l(A)$ 由 $l(A^*)$ 中适合条件

$$B(y, y_B)=B(y, y_A)+\alpha B(y, u)+\beta B(y, \bar{u})=0$$

的那些函数 $y(x)$ 所組成。但依 $l(A)$ 的定义，在 $y\in l(A^*)$ 及 $y_A\in l(A)$ 时，$B(y, y_A)=0$；于是，由于 α 及 β 是任意的，上面这一条件就可化为 $B(y, u)=B(y, \bar{u})=0$。关于 $l(C_\theta)$ 的断語也可以照樣地来証明。

174. 一端为正則点时的情形 若基本区間(a, b)的一端是运算子 $L(y)$ 的正則点，这时得出的結果就更为具体。确切地說，这就是設 a 是有穷数，函数 $q(x)$ 直到 $x=a$ 連續，而 $p(x)$ 也直到 $x=a$ 連續，具連續导数，而且是正的。在这样的假設下，来証明下一定理：

定理 4. 当端点 $x=a$ 是正則点时，$l(A^*)$ 是具下列性質的函数 $y(x)$ 所組成的綫性簇：$y(x)$ 及 $y'(x)$ 在(a, b)上(即直到 $x=a$)絕对連續，y 及 $L(y)\in L_2$；而綫性簇 $l(A)$ 由 $l(A^*)$ 中滿足条件

$$y(a)=y'(a)=0, \tag{153}$$

$$B_b(y, z)=0 \quad (z\in l(A^*)) \tag{154}$$

的函数所組成。

在所說条件下，齐次方程 $L(y)=0$ 的解 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 以及它們的导数都是直到 $x=a$ 絕对連續的，于是定理中关于綫性簇 $l(A^*)$ 的断語直接可自公式(132)推知。由(153)立即可知 $B_a(y, z)=0$，而(153)成立时可由(142)推出(154)。于是整个定理的証明归結到(153)的証明。

先来証明可以作出 $l(A^*)$ 中这样的函数 $z_0(x)$，使

$$z_0(a)=\gamma;\ z_0'(a)=\delta;\ z_0(x)=0\quad (x>c\text{ 时}),\qquad (155)$$

其中 γ 及 δ 是任意复数，c 是区間 (a, b) 中的任意数。为此，設

$$f(x)=a_1y_1(x)+a_2y_2(x)\quad \text{当 } a\leqslant x\leqslant c,$$
$$f(x)=0\quad \text{当 } c<x<b,$$

并用公式(131)来作 $z_0(x)$

$$z_0(x)=\frac{1}{k}\int_c^x[y_1(x)y_2(t)-y_1(t)y_2(x)]f(t)\,dt,\qquad (155_1)$$

由此知 $L(z_0)=f(t)$，$z_0(x)$ 在 $c<x<b$ 时等于零，且 $z_0(x)\in l(A^*)$，因为 $f(x)\in L_2$。为使(155)中的头两个条件满足，只要适当选擇常数 a_1 及 a_2。假如說选擇齐次方程的这样两个实解 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$，使它們在区間 $[a, c]$ 上是規格化正交的，則得到用以确定 a_1 及 a_2 的方程組

$$a_1\frac{y_2(a)}{k}-a_2\frac{y_1(a)}{k}=\gamma;\quad a_1\frac{y_2'(a)}{k}-a_2\frac{y_1'(a)}{k}=\delta,$$

而它的行列式 $1:p(a)$ 是异于零的。$z(x)=z_0(x)$ 时，$l(A)$ 中的所有函数 $y(x)$ 都应满足条件(142)，即 $B_b(y, z_0)-B_a(y, z_0)=0$，而由于 $c<x<b$ 时 $z_0(x)=0$，这一条件便归結为 $B_a(y, z_0)=0$，即归結为条件 $p(a)y(a)\bar{\delta}-p(a)y'(a)\bar{\gamma}=0$；由于 γ 及 δ 是任意的，由此便得(153)；定理于是証明了。

綫性簇 $l(A)$ 上条件(153)成立这一事实，說明 $l(A)$ 只是 $l(A^*)$ 的部分，就是說，只要有一个端点是正則点，就不可能有亏指数 $(0, 0)$。

再比較詳細地分析一下亏指数为 $(1, 1)$ 时的情形。这时运算子 A 有扩展自共軛运算子 C_θ，而綫性簇 $l(C_\theta)$ 由公式(150)确定。現要証明：不管 θ 是什么数值，实函数 $u_\theta(x)$ 不可能同时满足条件 $u_\theta(a)=0$ 及 $u_\theta'(a)=0$。要是这两条件能同时满足的話，那末依(151) $e^{i\frac{\theta}{2}}u(a)$ 及 $e^{i\frac{\theta}{2}}u'(a)$ 应是实数，于是必有一实系数的关系式 $h_1u(a)+h_2u'(a)=0$。但这关系式显然也应为函数 $\overline{u(x)}$ 所满足。依

(153)，$l(A)$ 中的所有函数也都要满足这关系式，于是依(152) $l(A^*)$ 中的所有函数也应满足这关系式，而这是不可能的，因为我們刚見到过：$l(A^*)$ 中的 $z_0(x)$ 可滿足 $x=a$ 时的任何初値条件。这样，实函数 $u_\theta(x)$ 显然滿足一个下列形式的齐次条件：

$$h_1 y(a)+h_2 y'(a)=0, \qquad (156)$$

其中 h_1 及 h_2 是实系数，至少有一个异于零，并且除了一个任意实数因子外是确定的。因依定理中的条件(153)所有的 $y_A(x)$ 都是滿足条件(156)的，故根据公式(150)可知所有函数 $y_{C_\theta}(x)$ 滿足条件(156)。

任意給定了有实系数的条件(156)后，可确定这样的 θ，使 $u_\theta(x)$ 滿足这条件。留意(151)，不难看出 θ 由方程

$$\operatorname{Im} e^{i\frac{\theta}{2}}[h_1 u(a)+h_2 u'(x)]=0 \qquad (157)$$

确定，这里 Im 是虚部的記号。我們刚証过方括号内的和不可能等于零。現在来証明：不同的条件(156)，有区間 $0\leqslant\theta<2\pi$ 内不同的 θ 与之对应。因为如果不是这样的話，則在 θ 为某一值时的 $u_\theta(x)$ 将滿足(153)型的两个不同的条件，从而将有 $u_\theta(a)=u_\theta'(a)=$ $=0$，而这，如刚才所指出的，是不可能的。

所以，在任意选擇 θ 时，$l(C_\theta)$ 中的所有函数滿足(156)型的一个有实系数的确定条件；反之，任何这样的一个条件，都依这意义有一确定的 θ 与之对应。現在来証明，綫性簇 $l(A^*)$ 的这个部分綫性簇 $l(C_\theta)$ 可以由条件(156)完全刻划。設 $l(A^*)$ 中的某一函数 $y_{A^*}(x)$ 滿足与某一 $\theta=\theta_0$ 值相应的条件(156)。留意公式(152)以及 $y_A(x)$ 滿足(156)型的任何条件这一事实，得：

$$\alpha[h_1 u(a)+h_2 u'(a)]+\beta[h_1\overline{u(a)}+h_2\overline{u'(a)}]=0, \qquad (158)$$

其中两个方括号里的和数是互为共軛的，于是根据上述可知它們都是异于零的。由等式(158)可知，比 $\beta:\alpha$ 的模应等于1，故若設

$\beta:\alpha=-e^{-\frac{\theta_1}{2}}$，便知和(152)可化为 $\theta=\theta_1$ 时的(150)，就是說，若 $l(A^*)$中的某函数 $y(x)$ 滿足与某一 $\theta=\theta_0$ 值相应的条件(156)，則 $y(x)$ 屬于一 C_{θ_1}。据上述 θ 值与条件(156)之間的一一对应关系，可知 $\theta_1=\theta_0$，故这些論証使我們得到下面的定理：

定理 5. 若端点 $x=a$ 是正則点，运算子 A 的亏指数是(1, 1)，則 $l(A^*)$中适合(156)型的任何条件的函数 $y(x)$，組成 A 的任一扩展自共軛运算子的綫性簇 $l(C_\theta)$。在(156)型的各种不同的条件与区間 $0\leq\theta<2\pi$ 内的各 θ 值之間，有一一对应关系。

右端点 $x=b$ 为正則点的情形也可以完全类似地来考察。

現在对所說情形再来証明一个定理。設 $u(x)$ 及 $v(x)$ 是 $l(A^*)$ 中滿足条件 $u(a)=u'(a)=0$ 及 $v(a)=v'(a)=0$ 的两个函数。可設它們屬于 $l(C_\theta)$，其中 θ 为任一确定值。因运算子 A 在 $l(C_\theta)$上是自共軛运算子，公式(139)的左边在 $y=u(x)$ 及 $z=v(x)$ 时等于零。而依所說条件，該式右边的 $B_a(u, v)=0$，故对 $l(A^*)$ 中滿足以上条件的任何函数有 $B_b(u, v)=0$。設 $y(x)$ 及 $z(x)$ 是 $l(A^*)$中的任意函数。如上面所証明的，可利用公式(155_1)作 $l(A^*)$中的函数 $y_0(x)$ 及 $z_0(x)$，它們在 $c<x<b\,(a<c<b)$时等于零，且 $y_0(a)=$ $=y(a)$，$y_0'(a)=y'(a)$，$z_0(a)=z(a)$，$z_0'(a)=z'(a)$。若設 $y(x)=$ $=y_0(x)+u(x)$ 及 $z(x)=z_0(x)+v(x)$，則 $u(x)$ 及 $v(x)$ 屬于 $l(A^*)$，且这些函数和它們的导数在 $x=a$ 等于零。我們显然有：$B_b(y,z)=$ $=B_b(y_0, z_0)+B_b(y_0, v)+B_b(u, z_0)+B_b(u, v)$。右边头两項等于零，因 $c<x<b$ 时 $y_0(x)=0$，$z_0(x)=0$，而第四項則据剛才所証的等于零，故对 $l(A^*)$中的任何 $y(x)$ 及 $z(x)$ 有 $B_b(y, z)=0$。据此，定理 4 中的条件(154)可以不要。于是得到以下定理：

定理 6. 若端点 $x=a$ 是正則点且运算子 A 的亏指数是(1, 1)，則对 $l(A^*)$中的任何 $y(x)$ 及 $z(x)$ 有 $B_b(y, z)=0$，于是綫性簇 $l(A)$

由 $l(A^*)$ 中满足条件(153)的那些元所組成。

对端点 $x=b$ 为正則点的情形,可以完全类似地来考虑。

175. 对一般情形的补充　应用上节結果,可对[173]中关于两端点都不是正則点时的結果作一重要的补充。取 (a, b) 内一点 c,設 c 为区間 (a, c) 及 (c, b) 的正則端点而来考察这两区間。設 n_a 及 n_b 各是方程 (147_1) 及 (147_2) 分别在区間 (a, c) 及 (c, b) 上屬于 L_2 的解的个数。由于这两方程在 (a, b) 内任何区間 (c', c'') 上的一般积分屬于 L_2,故可断言 n_a 及 n_b 不依賴于 c 的选擇。其次,我們看到,在端点为正則点的情形,不可能有亏指数 $(0, 0)$,故只可能有下列几种情形:I. $n_a=n_b=2$; II. $n_a=n_b=1$; III. $n_a=2$, $n_b==1$; IV. $n_a=1$, $n_b=2$。

定理 7. 在情形 I 时运算子 A 在 (a, b) 上的亏指数是 $(2, 2)$,在情形 II 时是 $(0, 0)$,而在情形 III 及 IV 时是 $(1, 1)$。

在情形 I 时,方程 (147_1) 及 (147_2) 的一般积分显然屬于 (a, b) 上的 L_2,这时亏指数是 $(2, 2)$。現在来看情形 II。这时 A 在区間 (a, c) 及 (c, b) 上的亏指数是 $(1, 1)$。其次,若 y 及 z 屬于 (a, b) 上的 $l(A^*)$,則它們更应屬于 (a, c) 及 (c, b) 上的 $l(A^*)$,故依定理 5 有 $B_a(y,z)=B_b(y,z)=0$ 从而 $B(y,z)=B_b(y,z)-B_a(y,z)=0$;由此可知在 (a, b) 上 $l(A^*)$ 与 $l(A)$ 重合,即亏指数是 $(0, 0)$。在情形 III 及 IV,方程 (147_1) 及 (147_2) 在 (a, b) 上的 L_2 中之解显然只有一个(除常数因子外可以唯一确定);定理証明了。

我們来看情形 III。这时,在以 c 为正則端点的区間 (c, b) 上,亏指数是 $(1, 1)$,故依定理 5 对 (c, b) 上 $l(A^*)$ 中的任何函数有 $B_b(y, z)=0$,故对 (a, b) 上 $l(A^*)$ 中的任何函数此式更应成立。留意綫性簇 l 的定义以及[173]中的定理 3,便可断言 $l(A)$ 是由条件 $B_a(y, z)=0$ 确定的,其中 z 是 $l(A^*)$ 中任意函数,即 $B_a(y, u)==B_a(y, \bar{u})=0$;而 $l(C_\theta)$ 是由条件 $B_a(y, u_\theta)=0$ 确定的。这里应

注意 u 及 $\bar{u}$ 是屬于 $l(A^*)$ 的，因 $L(u)=iu$ 而 $L(\bar{u})=-i\bar{u}$。情形 IV 的考察也完全相似，故得下定理：

定理 8　在 $n_a=2$ 及 $n_b=1$ 的情形，綫性簇 $l(A)$ 由条件 $B_a(y, z)=0$ 确定，其中 z 是 $l(A^*)$ 中任意函数，或即由 $B_a(y, u)=B_a(y, \bar{u})=0$ 确定，而 $l(C_\theta)$ 則由条件 $B_b(y, u_\theta)=0$ 决定，其中 $y\in l(A^*)$。对 $n_a=1$ 及 $n_b=2$ 的情形可作类似的断語。

176. 亏指数为 (2, 2) 的情形　在对 $p(x)$ 及 $q(x)$ 依 [174] 开头所作的假設下，我們詳細考察了 A 有亏指数 (1, 1) 这种情形。亏指数为 (2, 2) 这种情形的討論，在一定程度上和前面的相同，但是比较麻煩些。这时，除了 (156) 型的条件之外，还有端点 $x=b$ 处的边界条件。我們只講述这方面的結果，不詳細証明它們。在这情形，方程 (147_1) 的任何解屬于 L_2，但若要求此解滿足有实系数的任一如下类型的条件

$$h_1u(a)+h_2u'(a)=0, \tag{159}$$

那就只剩下方程 (147_1) 的一个解 $u(x)$。然后，依公式 (151) 作实函数 $u_\theta(x)$，我們便从 $l(A^*)$ 中定出一个綫性簇 $l(C)$，它由 $l(A^*)$ 中滿足条件 (156) 及条件 $B_b(y, u_\theta)=0$ 的那些函数 $y(x)$ 所組成，并定出了这綫性簇上的运算子 $Cy=L(y)$。这运算子是 A 的扩展自共軛运算子。如选取 (156) 型的不同的条件以及不同的数 θ，便得到 A 的不同的扩展。但这些扩展并不完全包括运算子 A 的全部自共軛扩展（見[173]）。不难看出，所有在亏指数 (1, 1) 情形下得到的 A 的自共軛扩展，以及刚才所講的所有扩展，都具有下一性質：若 $y\in l(C)$，則 $\bar{y}\in l(C)$ 且 $C\bar{y}=\overline{Cy}$。而在亏指数为 (2, 2) 时，A 的所說这一类自共軛扩展甚至并不完全包括 A 的具有上述性質的所有扩展。若数 a 及 b 是有穷的，而函数 $p(x)$ 及 $q(x)$ 在区間的两端（它們都是正則点）具有上述性質，則运算子 A 显然有亏指数 (2, 2)。綫性簇 $l(A^*)$ 由适合下列条件的函数 $y(x)$ 所組成：$y(x)$ 及 $y'(x)$ 在 $[a, b]$ 上絕对連續，且 $L(y)$ 屬于 $[a, b]$ 上的 L_2；$l(A)$ 由 $l(A^*)$ 中适合条件 $y(a)=y'(a)=y(b)=y'(b)=0$ 的函数所組成，而为要得到 A 的自共軛扩展，应在 $l(A^*)$ 中具下列性質的函数 $y(x)$ 所組成的綫性簇上确定运算子 $L(y)$：这些函数 $y(x)$ 滿足边界条件

$$h_1y(a)+h_2y'(a)+h_3y(b)+h_4y'(b)=0,$$

$$g_1y(a)+g_2y'(a)+g_3y(b)+g_4y'(b)=0,$$

而常数 h_k 及 g_k 应滿足条件 [IV; 98]

$$p(a)\begin{vmatrix}h_1 & h_2\\ g_1 & g_2\end{vmatrix}=p(b)\begin{vmatrix}h_3 & h_4\\ g_3 & g_4\end{vmatrix}。$$

还要指出，在本节指出的所有各种情形下，运算子 A 的自共轭扩展的豫解式，是以 $G(x, y)$ 为核的积分运算子，而 $G(x, y)$ 满足[146]中的条件 (115)；若 l 不属于譜，則就方程

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+[q(x)-l]y=f(x) \tag{160}$$

(其中 $f(x)\in L_2$，$y(x)$ 是从綫性簇 $l(C)$ 中去求的，其上定义了 A 的自共轭扩展)而論，它的解具有形式

$$y(x)=\int_a^b G(x, y)f(y)\,dy;$$

$G(x, y)$ 具有所設的性質，隨着 A 的不同的自共轭扩展而不同并且是依賴于数 l 的。因此，上述所有这些自共轭扩展都具有純点譜。当两端点都是正則点时，$G(x, y)$ 是取相反符号的格林函数(我們以前作出过的)。在其他各情形下，它也可以完全相似地作出。

再来考察[174]中所考察过的亏指数为 (1, 1) 的情形，我們可以完全照着 [IV; 96] 中做过的那样，就 (156) 型的任何条件作出运算子 $L(u)-iu$ 的格林函数。将它变号，便是 $l=i$ 时豫解式运算子的核。这核显然具有下形式：

$$G(x, y)=\begin{cases}u_0(x)u(y): p(x)\Delta(u_0, u) & \text{当 } x\leqslant y,\\ u_0(y)u(x): p(x)\Delta(u_0, u) & \text{当 } x\geqslant y,\end{cases} \tag{161}$$

这里 $u_0(x)$ 是方程(147_1)的满足条件(156)的解，而 $u(x)$ 是方程(147_1)的属于 L_2 的以前的解。这里的第二个条件可改为 $u(x)\in L_2$ 这一条件。完全同样地可以作出 l 为任意复数时豫解式的核。核(161)可能不满足[146]中的条件(115)，但可証明它满足[144]中的条件(98)。自一般理論可知，这核对应了有界映像。在一般情形下，自[173]，当亏指数为 (0, 0) 时，豫解式的核在 l 为任意复数时具有形状：

$$G(x, y)=\begin{cases}u_1(x)u_2(y): p(x)\Delta(u_1, u_2) & \text{当 } x\leqslant y,\\ u_1(y)u_2(x): p(x)\Delta(u_1, u_2) & \text{当 } x\geqslant y,\end{cases} \tag{162}$$

其中 $u_1(x)$ 是方程 $L(u)-lu=0$ 的属于区間 (a, c)，$a<c<b$，上 L_2 的解，而 $u_2(x)$ 是同一方程的属于 (c, b) 上 L_2 的解；这时这种解存在，而且除了常数因子未确定外这解是唯一的。

177. 例

1．考察区間 $(-\infty, \infty)$ 上的运算子 $L(y)=-y''$。方程 $-y''=iy$ 在 L_2 中根本沒有解，故亏指数是 $(0,0)$，就是說，运算子是自共轭的。根据条件，y 及 y' 是絕对連續的，而 y 及 y'' 屬于 $(-\infty, \infty)$ 上的 L_2。現在証明由此可以推出 $y'\in L_2$。我們用一种以后也要常用的方法来証。暫且設 $y(x)$ 是实函数，写出在任意有穷区間上的显然公式

$$-\int_{a'}^{b'} yy''dx+yy'\Big|_{a'}^{b'}=\int_{a'}^{b'} y'^2dx。\tag{163}$$

将显然的恒等式

$$y'^2=x^2\left(\frac{y}{x}\right)'^2+\left(\frac{y^2}{x}\right)'$$

积分，并設 a' 及 b' 是同号的，得到

$$\int_{a'}^{b'} y'^2dx=\frac{y^2}{x}\Big|_{a'}^{b'}+\int_{a'}^{b'} x^2\left(\frac{y}{x}\right)'^2dx。\tag{164}$$

将它代入(163)，得出

$$-\int_{a'}^{b'} yy''dx+\left[yy'-\frac{y^2}{x}\right]_{a'}^{b'}=\int_{a'}^{b'} x^2\left(\frac{y}{x}\right)'^2dx。\tag{165}$$

方括号里的差等于 $\frac{1}{2}x^2\left(\frac{y^2}{x^2}\right)'$。設 $0<a'<b'$。由于 y^2 在 $(-\infty, \infty)$ 上可和，故存在 b' 值的这种无穷增序列，使 $\left(\frac{y^2}{x^2}\right)'\leqslant 0$。又 (165) 左边的积分在 $b'\to\infty$ 时有極限，因 y 及 $y''\in L_2$，故对这一序列的 b' 值而論，(165) 右边的积分是有界的。由于被积函数是非负的，这积分在区間 (a', ∞) 上存在。看公式(164)，并留意因 y^2 可和而存在 b' 值的这样的增序列，使 $y^2:x\to 0$ 这一事实，故如上一样可以断言 y'^2 在区間 (a', ∞) 上的积分存在。完全同样地可以証明区間 $(-\infty, b')$ 上的积分存在，这里 $b'<0$。对复函数 $y(x)=y_1(x)+$ $+iy_2(x)$ 說，$|y'|^2=y_1'^2+y_2'^2$，于是它的积分的存在可由上述积分的存在而推出。不难看出，所考察的这一运算子跟用 x^2 乘这一运算么范相抵，并可得自公式(70)，只要令其中的 $\omega(y)=y^2$。由此出發，容易作出它的譜函数。在有穷区間的情形，运算子有亏指数 $(2, 2)$，而在补充要求每一端点滿足边界条件后，便得有純点譜的自共轭运算子。

在区間为 $(0, \infty)$ 的情形，方程 $-y''=iy$ 在 L_2 中有唯一的解 $u=$ $=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)x}$ (規格化的)，亏指数是 $(1, 1)$。为得到运算子的自共轭扩展，还必須要求正則端点 $x=0$ 滿足边界条件。当条件为 $y(0)=0$ 时，运算子沒有点譜，而連續譜分布在区間 $\lambda\geqslant 0$ 上。这时有唯一的微分解

$$y(x)=\frac{1}{x}\left(\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,x-\frac{1}{x}\sin\sqrt{\lambda}\,x\right)。$$

作豫解式，即方程 $-y''-(\sigma+\tau i)y=f(x)$ 在 $\tau>0$ 时的解再取极限、得豫函数

$$\mathscr{E}_\lambda f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\sqrt{2\lambda}\,(x-t)}{x-t}\,f(t)\,dt-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\sqrt{2\lambda}\,(x+t)}{x+t}\,f(t)\,dt。$$

所有这些結果可用初等計算得出。完全跟上面一样，可以証明：这时，对 $l(A^*)$ 中的任意函数 $y(x)$，$y'(x)$ 属于区間 $(0,\infty)$ 上的 L_2。

2. 考察运算子

$$L(y)=-\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]\quad(-1<x<+1),\tag{166}$$

这与亏指数 (2, 2) 相应，因方程 $L(y)=\pm iy$ 的任何解在区間端点只可能有对数奇异性。解方程 $L(y)=f(x)$，而 $f(x)$ 是 L_2 中的任意函数，得出綫性簇 $l(A^*)$ 的公式

$$y(x)=\left[C_1+\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}f(t)\ln\frac{1+t}{1-t}dt\right]+$$

$$+\left[C_2-\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}f(t)\,dt\right]\ln\frac{1+x}{1-x},\tag{167}$$

其中 $f(t)$ 是 L_2 中任一函数，C_1 与 C_2 是任意常数。我們还有

$$(1-x^2)y'=2\left[C_2-\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}f(t)\,dt\right]。\tag{168}$$

要給定綫性簇 $l(A^*)$ 中的 y 就相当于給定 $f(t)$，C_1 及 C_2，把公式(167)方括号中的式子記为 $G(y)$ 及 $H(y)$，可写出：

$$y=G(y)+H(y)\ln\frac{1+x}{1-x};\quad(1-x^2)y'=2H(y),\tag{169}$$

$$B_x(y,z)=(1-x^2)(y\bar{z}'-\bar{z}y')=2[G(y)\overline{H(z)}-\overline{G(z)}H(y)]。\tag{170}$$

对 $l(A^*)$ 中的任何 z，$\overline{G(z)}$ 及 $\overline{H(z)}$ 在 $x\to\pm1$ 时有有穷极限。由于自 $l(A^*)$ 中选擇各 z 时是任意的，故可断言[172]綫性簇 $l(A)$ 可由下列事实来刻划，即在 $x\to\pm1$ 时 $G(y)\to0$ 及 $H(y)\to0$，就是

$$C_1=C_2=\int_{-1}^{+1}f(t)\,dt=\int_{-1}^{+1}f(t)\ln\frac{1+t}{1-t}\,dt=0。\tag{171}$$

設 D 是运算子(166)，定义在 $l(A^*)$ 中适合下列条件的函数 $y(x)$ 所組成的綫

性簇 $l(D)$ 上：$x\to\pm1$ 时 $(1-x^2)y'\to0$，即 $x\to\pm1$ 时 $H(y)\to0$。这相当于

$$C_2=\int_{-1}^{+1} f(t)\,dt=0, \tag{172}$$

与刻划綫性簇 $l(A)$ 的(171)相比較之后，可見 $l(A)$ 是 $l(D)$ 的部分。自(170)立即可知，若 y 及 z 屬于 $l(D)$，則 $B(y,z)=0$，就是說，D 是对称运算子。現在証明 D 是自共軛运算子。这可归結为証明以下的断語：若区間$[-1, +1]$上 L_2 中的函数 $z(x)$ 及 $z^*(x)$，对 $l(D)$ 中的任何 y 滿足关系式

$$\int_{-1}^{+1} L(y)\,z\,dx=\int_{-1}^{+1} z^* y\,dx,$$

則 $z\in l(D)$ 而 $z^*=L(z)$。由于 $l(A)$ 是 $l(D)$ 的部分，故可断言上式能为 $l(A)$ 中的任何 y 所滿足。那样的話，則依 [172] 中的定理 1 可知 $z\in l(A^*)$ 及 $z^*=L(z)$。上式还告訴我們，对 $l(D)$ 中的任何 y，$B(y,z)=0$，而由于 $x\to\pm1$ 时的極限 $G(y)$ 是任意的，故知 $x\to\pm1$ 时 $H(z)\to0$，就是說，$z\in l(D)$；于是关于 D 为自共軛运算子的断言証明了。屬于綫性簇 $l(D)$ 的有所有的多項式，其中也有勒让德多項式。这些多項式組成区間$(-1, +1)$上的完全規格化正交組，我們知道它們是运算子 D 的固有元，从而知道这运算子有純点譜(見[176])。

現在証明綫性簇 $l(D)$ 由 $l(A^*)$ 中那些函数 $y(x)$ 所組成，这些函数使 $(1-x^2)|y'|^2$ 在区間$(-1, +1)$上是可积的。为此只要对实的 y 来証明这命題就够了。設 $-1<a'<b'<+1$，写出显然的公式

$$-\int_{a'}^{b'} y[(1-x^2)y']'dx+(1-x^2)yy'\Big|_{a'}^{b'}=\int_{a'}^{b'}(1-x^2)y'^2dx。 \tag{173}$$

由于 y 及 $[(1-x^2)y']'\in L_2$，左边的积分在 $a'\to-1$ 及 $b'\to+1$ 时有極限，于是为求 $(1-x^2)y'^2$ 在区間$(-1, +1)$上可积，必要且充分的条件是：积分号外的項在 $a'\to-1$ 及 $b'\to1$ 时有有穷的極限。若 $H(y)$ 在 $x\to-1$ 或 $x\to+1$ 时有异于零的極限，則由(169)立即可知 $|y|\to+\infty$ 而积分号外的項有无穷極限。但若条件(172)滿足，則

$$2H(y)\ln\frac{1+x}{1-x}=-\int_{-1}^{x} f(t)\,dt\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}=\int_{x}^{1} f(t)\,dt\cdot\ln\frac{1+x}{1-x},$$

由此，依舒伐尔兹不等式：

$$4\left|H(y)\ln\frac{1+x}{1-x}\right|^2\leqslant(x+1)\ln^2\frac{1+x}{1-x}\int_{-1}^{+1}|f(t)|^2dt;$$

$$4\left|H(y)\ln\frac{1+x}{1-x}\right|^2\leqslant(1-x)\ln^2\frac{1+x}{1-x}\int_{-1}^{+1}|f(t)|^2dt,$$

即当$x\to\pm1$时$H(y)\ln\frac{1+x}{1-x}\to0$。这时，依(169)，$y(x)$在$x\to\pm1$时有有穷極限，故这时$H(y)\to0$，即当$x\to\pm1$时$(1-x^2)y'\to0$，这就刻划了綫性簇$l(D)$，公式(173)中积分号外的项在$b'\to1$及$a'\to-1$时趋于零；关于$l(D)$的定理就此証明了。

3．現在来看与貝色勒方程相关的运算子

$$L(y)=-\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)\quad(0<x<\infty)。\tag{174}$$

方程$L(y)=\lambda y$有解$C_1H_0^{(1)}(2\sqrt{\lambda x})+C_2H_0^{(2)}(2\sqrt{\lambda x})$。設$\lambda=\pm i$，并留意在角度范圍$-\frac{\pi}{2}<\arc z<\frac{\pi}{2}$內成立的汉开尔函数的漸近式，不难看出在所論情形下的亏指数是(1, 1)。解非齐次方程$L(y)=f(x)$，得到綫性簇$l(A^*)$的公式：

$$y(x)=\left[C_1+\int_0^x f(t)\lg t\,dt\right]+\left[C_2-\int_0^x f(t)\,dt\right]\lg x\tag{175}$$

及

$$xy'(x)=C_2-\int_0^x f(t)\,dt,\tag{176}$$

其中$f(x)\in L_2$且$y(x)$也应屬于L_2，但这并不对L_2中的所有x都成立。若选定某$f(x)$及某C_1及C_2后，得L_2中的$y_1(x)$，則对同一$f(x)$但选定与前不同的C_1及C_2时，所得的$y_2(x)$可能就不再屬于L_2了，因为否則的話，形状为$a+b\lg x$的差$y_1(x)-y_2(x)$应屬于L_2，而这是不可能的。所以公式(175)把L_2中函数$f(x)$所組成的一綫性簇l_0映为$l(A^*)$，而l_0中的所有$f(x)$有确定的数值C_1及C_2与之相应。假如，比方說，$f(x)$只在有穷区間$[a', b']$上异于零，則設

$$C_1=-\int_{a'}^{b'} f(t)\lg t\,dt,\quad C_2=\int_{a'}^{b'} f(t)\,dt$$

后，得到函数$y(x)$，它在$x\geqslant b'$时等于零。只要适当选擇$f(t)$，就可得到C_1及C_2的任何值。用$G(y)$及$H(y)$来記公式(175)中方括号里的式子，得

$$B_x(y, z)=x(y\bar{z}'-\bar{z}y')=G(y)\overline{H(z)}-\overline{G(z)}H(y)。$$

在这情形，我們有$n_a=2$及$n_b=1$，于是依[175]中的定理7，綫性簇$l(A)$由条件$B_0(y, z)=C_1\bar{C}_2'-C_2\bar{C}_1'=0$刻划，其中$C_1$及$C_2$对$y$是常数，$C_1'$及$C_2'$对$z$是常数。这条件应为$l(A^*)$中的任何$z$所滿足，而由于$C_1'$及$C_2'$是任意的，故知$l(A)$可由条件$C_1=C_2=0$来刻划。在$l(A^*)$中，取适合$x\to0$时

$xy'\to 0$ 的(即适合 $C_2=0$) 这种函数 $y(x)$ 組成一綫性簇。如果用公式 (174) 在綫性簇 $l(D)$ 上确定运算子 D,則如上例一样可以証明 D 是自共軛运算子。

我們要証明: 綫性簇 $l(D)$ 由 $l(A^*)$ 中使 xy'^2 在区間 $(0,\infty)$ 上可积的那些函数 $y(x)$ 所組成。首先来証明輔助定理。

輔助定理　若 $y\in l(A^*)$,則 xy'^2 在区間 (a',∞) 上可积,其中 $a'>0$。

a' 的数值是多少显然沒有什么关系,故可設 $a'>1$。写出公式

$$-\int_{a'}^{b'}y(xy')'dx+xyy'\Big|_{a'}^{b'}=\int_{a'}^{b'}xy'^2\,dx,\tag{177}$$

其中 $1<a'<b'<\infty$。引入新变量 $t=\lg x$,得:

$$\int_{a'}^{b'}xy'^2dx=\int_c^d\left(\frac{dy}{dt}\right)^2dt,$$

这里 $c=\lg a'$ 而 $d=\lg b'$。将显然的恒等式

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=t^2\left(\frac{d}{dt}\frac{y}{t}\right)^2+\frac{d}{dt}\frac{y^2}{t}$$

积分,可得:

$$\int_c^d\left(\frac{dy}{dt}\right)^2dt=\frac{y^2}{t}\Big|_c^d+\int_c^d t^2\left(\frac{d}{dt}\frac{y}{t}\right)^2dt,\tag{178}$$

于是公式(177)可改写为:

$$-\int_{a'}^{b'}y(xy')'dx+\left[y\frac{dy}{dt}-\frac{y^2}{t}\right]_c^d=\int_c^d t^2\left(\frac{d}{dt}\frac{y}{t}\right)^2dt。\tag{179}$$

方括号里的式子等于 $\frac{t^2}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{y^2}{t^2}\right)$,于是用相似于例1中的推理,便得輔助定理中的断語。

再来看公式(177),設 $0<a'<b'<\infty$。由所証輔助定理可知积分号外的項在 $b'\to\infty$ 时有有穷極限,而为要 xy'^2 在区間 $(0,\infty)$ 上可积,必要且充分的条件是:这一項在 $a'\to 0$ 时有有穷的極限。若 $C_2=0$,則依 (176) $x\to 0$ 时 $xy'\to 0$,而依 (175),如在例2中一样,可知 $x\to 0$ 时 $y\to C_1$。若 $C_2\neq 0$,則 $xy'\to C_2$ 而 $y\to\infty$,就是說 $xyy'\to\infty$,这就証明了关于綫性簇 $l(D)$ 的断語。方程 $-(xy')'=\lambda y$ 有属于 $l(D)$ 的一解 $I_0(2\sqrt{\lambda x})$,而不管 λ 是什么实数,它都不屬于 L_2,故运算子 D 有純連續譜。把这个解在区間 $[0,\lambda]$ 上对 λ 积分,便得 $\lambda\geqslant 0$ 时的微分解 $\sqrt{\lambda:x}\,I_1(2\sqrt{\lambda x})$。

4. 我們来看与埃尔密特函数相关的运算子:

$$L(y)=-y''+x^2y\quad(-\infty<x<+\infty)。\tag{180}$$

对 $l(A^*)$ 中的任意函数 $y(x)$ 以及任意有穷区間,有公式

$$\int_{a'}^{b'} yL(y)\,dx + yy'\Big|_{a'}^{b'} = \int_{a'}^{b'} y'^2 dx + \int_{a'}^{b'} x^2y^2 dx。\qquad (181)$$

如只限于考察实函数，应用公式(181)并照例1那样来論証，便知y'^2及x^2y^2与乘积$yL(y)$都在区間$(-\infty, +\infty)$上可积。从而依(181)可知乘积yy'在$x\to\pm\infty$时应有極限。但由于y与$y'\in L_2$，故这乘积在区間$(-\infty, +\infty)$上可和，于是这極限应等于零，就是說，对$l(A^*)$中的任何实函数$y(x)$証明了公式:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} yL(y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} y'^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} x^2y^2 dx。\qquad (182)$$

現在証明与运算子(180)相应的亏指数是(0, 0)。用归謬法来証。設方程$L(y)=iy$在L_2中有解$y=y_1+y_2i$。这时$L(y_1)=-y_2$且$L(y_2)=y_1$。对y_1及y_2应用公式(182)，并把所得等式加起来，得到:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y_1'^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y_2'^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} x^2y_1^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} x^2y_2^2 dx = 0,$$

由此立即可知y_1及y_2是与零相抵的，于是，运算子(180)，沒有外加任何边界条件的，乃是自共軛运算子。它的固有元是埃尔密特函数，成一完全組，故运算子(180)有純点譜。

5. 我們来看与拉盖尔函数[11;223]相关的运算子:

$$L(y) = -(xy')' + \frac{x}{4}y \quad (0<x<\infty)。\qquad (183)$$

对$l(A^*)$中的任何函数，有公式

$$\int_{a'}^{b'} yL(y)\,dx + xyy'\Big|_{a'}^{b'} = \int_{a'}^{b'} xy'^2 dx + \int_{a'}^{b'} \frac{x}{4}y^2 dx,\qquad (184)$$

其中$0<a'<b'<\infty$，而如例3中一样，由此可知xy'^2及xy^2在区間(a', ∞)上可积，$a'>0$。如例4一样，我們从而知道$x\to\infty$时$xyy'\to 0$。方程$L(y)=iy$的任何解，在$x=0$只可能有对数奇异性，故它屬于任何有穷区間$(0, c)$上的L_2，就是說$n_a=2$。現在証明$n_b=1$。为此，只要証明方程$L(y)=iy$在原点处为正則的解$y=y_1+iy_2$不可能屬于L_2。而若是这样的話，则y_1及y_2将屬于$l(A^*)$，而此外将有: $x\to 0$时$xy_1y_1'\to 0$及$xy_2y_2'\to 0$。对y_1及y_2应用公式(184)，取$a'\to 0$及$b'\to\infty$时的極限，并将所得等式相加，则将得等式

$$\int_0^{\infty} xy_1'^2 dx + \int_0^{\infty} xy_2'^2 dx + \int_0^{\infty} \frac{x}{4}y_1^2 dx + \int_0^{\infty} \frac{x}{4}y_2^2 dx = 0,$$

由此将推得$y_1(x)$及$y_2(x)$与零相抵，而这是不合理的。于是，$n_a=2$而$n_b=1$，因而运算子(183)有亏指数(1, 1)，可以証明: 在由$l(A^*)$中使xy'^2及

xy^2 在整个区間 $(0, \infty)$ 上可积的那些 y 所組成的綫性簇 $l(D)$ 上，这运算子是自共軛的。拉盖尔函数属于这綫性簇，成一完全組，故运算子 D 有純点譜。

6. 在前两例中，我們考察了运算子 $-[p(x)y']'+q(x)y$ 中函数 $q(x)$ 在基本区間上有正值的情形。現在取 $q(x)$ 为負值函数的运算子(見 Weyl, Mathem. Annal., Bd. 68, 267 頁)：

$$L(y)=-y''-xy \quad (0\leqslant x<\infty)。 \tag{185}$$

区間端点 $x=0$ 是这运算子的正則端点。对齐次方程 $y''+xy=0$，不难驗証 [II; 49] 它的一般积分是：

$$y(x)=C_1\sqrt{x}\,I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)+C_2\sqrt{x}\,I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)。 \tag{186}$$

或即

$$y(x)=C_1\sqrt{x}\,H^{(1)}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)+C_2\sqrt{x}\,H^{(2)}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)。 \tag{187}$$

方程 $L(y)=\lambda y$ 具有 $y''+(x+\lambda)y=0$ 这一形式，它的一般解是 $y(x+\lambda)$，其中 $y(x)$ 由公式(186)或(187)确定。留意汉开尔函数的漸近表示式，則可断言方程 $L(y)=iy$ 在 L_2 中只有一个解，就是說，在所說情形下，亏指数是 $(1, 1)$，因此，为使运算子(185)是自共軛的，只要要求端点 $x=0$ 滿足边界条件就行了。設 $y(0)=0$。方程 $L(y)=\lambda y$ 的滿足这一条件的解，显然具有形式：

$$u_1(\lambda)u_2(x+\lambda)-u_2(\lambda)u_1(x+\lambda), \tag{188}$$

其中

$$u_1(x)=\sqrt{x}\,I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right); \quad u_2(x)=\sqrt{x}\,I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)。 \tag{189}$$

留意貝色勒函数的漸近式，由其得出

$$u_1(x)\sim\sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\cos\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{\pi}{12}\right);$$

$$u_2(x)\sim\sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\cos\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{5\pi}{12}\right),$$

我們看到，不管 λ 是什么实数，函数(188)都不会属于 L_2，即是說，运算子具有純連續譜。将解(188)对 λ 积分，得出 L_2 中的函数，而不論 λ 是什么实数值；这函数是微分解，因而譜填滿了整个实数軸。利用这解，可作出与傅立叶公式相类似的公式(見上述 Weyl 的論文)。

178. 无穷矩陣 在[165]中考察了一种积分运算子，其核是满足条件(85)及(86)的。完全类似地，可以在 l_2 中考察由下面这种矩陣

$$y_i=\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}x_k \quad (i=1, 2, \cdots) \tag{190}$$

所实現的运算子，其中 $a_{ki}=\bar{a}_{ik}$ 且满足条件

$$d_k^2=\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ik}|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ki}|^2<\infty \quad (k=1, 2, \cdots; d_k\geqslant 0), \tag{191}$$

这时，級数(190)对 l_2 中的任何元 x 絕对收斂，但由 $|y_i|^2$ 組成的級数却不一定收斂，即是說，$(y_1, y_2, \cdots)$ 可能不是 l_2 中的元。用 $l(A_0)$ 来記 l_2 中适合

$$\sum_{k=1}^{\infty}d_k|x_k|<\infty$$

的这种 x，而用 $l(B)$ 来記那些使 $(y_1, y_2, \cdots)\in l_2$ 的 x。像在[165]中一样，可証 $l(A_0)$ 在 l_2 中处处稠密且 $l(A_0)\subset l(B)$。再用 A_0 来記由公式(190)定义在 $l(A_0)$ 上的运算子，用 B 来記由同一公式定义在 $l(B)$ 上的运算子，則可斷言 A_0 是对称运算子且 $B=A_0^*$ (見[165])。我們指出，依(191)，所有坐标基都屬于 $l(B)$，甚且屬于 $l(A_0)$。为使 B 是自共軛的，必要且充分的条件是：对 $l(B)$ 中的任何 x 及 y，成立(見[165])下等式

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}x_k\right)\bar{y}_i=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ik}\bar{y}_i\right), \tag{192}$$

而由于 $a_{ik}=\bar{a}_{ki}$，故有

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_{ik}\bar{y}_i=\overline{\sum_{i=1}^{\infty}a_{ki}y_i}\text{。}$$

对称运算子 A_0 可能不是閉的，于是我們还要引入新运算子 A，并証明它是 A_0 的閉包。設 $l(A)$ 是 $l(B)$ 中适合

$$(Bx, y)=(x, By) \quad (y\in l(B)) \tag{193}$$

的这种 x 所組成的綫性簇，而 A 是由公式(190)定义在 $l(A)$ 上的

运算子。另一方面，把适合$(By, x)=(y, x^*)$ $(y\in l(B))$的这种元x組成綫性簇$l(A_0^{**})$，而在該簇上定义运算子A_0^{**}，則因$A_0^{**}\subset A_0^*$，x^*可依公式(190)用x来表达，即$x^*=Bx$。将这与A的定义相比較，可見A_0^{**}与A重合。但A_0^{**}是A_0的閉包，就是說A是A_0的閉包，于是$A^*=A_0^*=B$[154]。試說明綫性簇$l(A)$及运算子A的一个性質。l_2中的所有元$(x_1, x_2, \cdots)$，凡是只有有穷个分量x_k是异于零的，叫做"有穷元"。設$l(A')$是"有穷元"組成的綫性簇，A'是定义在这綫性簇上的运算子(190)。由于$a_{ki}=\overline{a_{ik}}$，这是个对称运算子，而$l(A')$的任何元显然都在$l(A_0)$中，即$A'\subset A_0$；于是，若用$\overline{A}'$記A'的閉包，則$\overline{A}'\subseteq A$，故$A^*\subseteq(\overline{A}')^*$。設$e_k$是編号为$k$的坐标基。$(\overline{A}')^*$中的任何元$y$应滿足等式$(Be_k, y)=(e_k, y^*)$，而$y^*=(\overline{A}')^*y$。用$y_i$及$y_i^*$来記$y$及$y^*$的各分量，可将所說等式写为下形式：

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}\overline{y_i}=\overline{y_k^*}, \quad \text{即} \quad y_k^*=\sum_{i=1}^{\infty} a_{ki}y_i,$$

由此可見$y\in l(A^*)$而$y^*=A^*y$。将这結果与$A^*\subseteq(\overline{A}')^*$相比較，可知$(\overline{A}')^*=A^*$，故$A^{**}=\overline{A}'$。但$A^{**}=A$，故$\overline{A}'=A$。这个結果可按如下方式来陈述：

定理 若$x\in l(A)$，則存在这样的"有穷元"序列ξ_n，使$\xi_n\Rightarrow x$，$A\xi_n\Rightarrow Ax$且$A=\overline{A}'$。

A的自共軛性可归結为$A^*=A$。如若不然，則运算子A的亏指数，由方程$Ax=ix$及$Ax=-ix$的解的子空間維数所确定，故可应用以上所講运算子的扩展理論。还要再証明：若矩陣a_{ik}是实的，且复元$x'+x''i$屬于$l(A)$，則x'及x''也屬于$l(A)$，从而也有$x'-x''i\in l(A)$。事实上，依所証定理，存在"有穷元"的这种序列$\xi_n=\xi_n'+\xi_n''i$，使$\|x-\xi_n\|^2=\|x'-\xi_n'\|^2+\|x''-\xi_n''\|^2\to 0$且$\|Ax-A\xi_n\|^2=\|Ax'-A\xi_n'\|^2+\|Ax''-A\xi_n''\|^2\to 0$，由此知$\|x'-\xi_n'\|\to 0$，

$\|Ax'-A\xi_n'\|\to 0$, $\|x''-\xi_n''\|\to 0$, $\|Ax_n''-A\xi_n''\|\to 0$。留意 $A=\overline{A}'$，便得上述命題。

179. 雅科比矩陣　現在把上述結果应用到下面的雅科比矩陣上去：

$$\left\|\begin{array}{cccccc} a_0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & b_2 & a_3 & b_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right\|, \tag{194}$$

其中 a_i 是实数，$b_i>0$。条件(191)显然是满足的。坐标基的編号从 $k=0$ 起。

依公式(見[140])

$$\lambda P_k(\lambda)=b_k P_{k+1}(\lambda)+a_k P_k(\lambda)+b_{k-1}P_{k-1}(\lambda), \tag{195}$$
$$P_{-1}(\lambda)=0; \quad P_0(\lambda)=1,$$

作实多項式 $P_k(\lambda)$，由此得

$$e_k=P_k(A)e_0, \tag{196}$$

这里用 e_k 記坐标基。

定理 1. 若級数

$$\sum_{k=0}^{\infty}|P_k(i)|^2 \quad (i=\sqrt{-1}) \tag{197}$$

收斂，則运算子 A 不是自共軛的。

因(197)收斂，可取 l_2 中有分量 $x_k=\overline{P_k(i)}$ 的元 x，使 $(x,e_k)=\overline{P_k(i)}$。留意 $Ae_k=b_{k-1}e_{k-1}+a_k e_k+b_k e_{k+1}$，以及公式(196)，得：

$$(Ae_k,x)=b_{k-1}\overline{P_{k-1}(i)}+a_k\overline{P_k(i)}+$$
$$+b_k\overline{P_{k+1}(i)}=i\overline{P_k(i)},$$

由此，依 $(e_k,x)=\overline{P_k(i)}$，可写出 $(Ae_k,x)=(e_k,ix)$。根据 A 以及数积的分配性，得 $(Ay,x)=(y,ix)$ 对任何"有穷元" y 成立，而

依[178]中的定理，这等式对 $l(A)$ 中的任何 y 成立，故 $x \in l(A^*)$ 而 $A^*x=ix$，由此知 A 不是自共軛运算子。

定理 2. 若級数(197)發散，則运算子 A 是自共軛的。

只要証明 A^* 沒有固有值 $\pm i$ 就行了。假設不是这样，則 $A^*x=ix$，其中元 $x(x_0, x_1, x_2, \cdots)$ 是异于零的。根据 A^* 的定义以及 $e_k \in l(A)$ 这一事实，則有 $(Ae_k, x)=(e_k, ix)$ 或 $(x, Ae_k)=i(x, e_k)$，就是說，$(x, b_{k-1}e_{k-1}+a_ke_k+b_ke_{k+1})=ix_k$。展开数积后，得：$b_{k-1}x_{k-1}+$ $+a_kx_k+b_kx_{k+1}=ix_k$。利用(195)及数学归納法，由此得：$x_k=$ $=P_k(i)x_0$ 及 $x_0 \neq 0$。但这跟(197)为發散的事实相矛盾。若把(197)中的 i 换为 $(-i)$，則因 $P_k(-i)=\overline{P_k(i)}$，显然也会得到發散級数，于是如上一样可知 A^* 沒有固有值 $-i$；定理就証明了。所以，級数(197)發散是 A 为自共軛运算子的必要且充分条件。只要重复以上两定理的証明字句，就可証明，若級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} |P_k(\alpha)|^2 \tag{198}$$

对任何不是实数的 α 收斂，則 α 及 $\bar{\alpha}$ 是 A^* 的固有值，而若級数(198)对某一非实数的 α 發散，則 α 及 $\bar{\alpha}$ 不是 A^* 的固有值。在后一情形下，照[167]及[168]那样来推理，可知 A 是自共軛运算子，就是說級数(197)發散。反之，若(198)对某一非实数的 α 收散，則 A^* 有非实数的固有值，于是 A 非自共軛运算子；級数(197)也是收斂的。这些論証使我們得到以下的定理：

定理 3. 只可能有以下的两种情形：級数(198)对任何非实数的 α 發散，或是，对任何非实数的 α 收斂。在第一种情形下，A 是自共軛运算子，在第二种情形下，不是自共軛运算子。

进一步，由定理 2 的証明立即可知，若(197)收斂，則 A^* 的与固有值 i 相应的固有元的分量滿足等式 $x_k=P_k(i)x_0(k=1, 2, \cdots)$，这里 x_0 是异于零的任意元，即子空間 $M_i(A)$ 是一維的。同

样，$M_{-i}(A)$也是一維的。后者可由$M_i(A)$中的元x_k换为共軛元而得出。因此，在第二种情形下A的亏指数是$(1, 1)$。子空間$M_i(A)$及$M_{-i}(A)$中的元x_i及x_{-i}，除了有任意复数因子外，可由公式

$$x_i = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(i) e_k; \quad x_{-i} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(-i) e_k$$

唯一确定，而A的自共軛扩展A_θ的子空間$l(A_\theta)$可由公式$v = x_A + \alpha x_\theta$唯一确定，其中$x_A \in l(A)$，$\alpha$是任意复数，$x_\theta = i(e^{-\frac{\theta}{2}} x_{-i} + e^{\frac{\theta}{2}} x_i)$，而$0 \leqslant \theta < 2\pi$。設$\mathscr{E}_\lambda$在第一种情形下是$A$的譜函数，或在第二种情形下是任一$A_\theta$的譜函数且$\rho(\lambda) = (\mathscr{E}_\lambda e_0, e_0)$。完全和[140]中一样，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_k(\lambda) P_l(\lambda) d\rho(\lambda) = \begin{cases} 0 \text{ 当 } k \neq l \text{ 时}, \\ 1 \text{ 当 } k = l \text{ 时}, \end{cases}$$

$$(Ae_k, e_l) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda P_k(\lambda) P_l(\lambda) d\rho(\lambda),$$

$$e_k = \int_{-\infty}^{+\infty} P_k(\lambda) d\mathscr{E}_\lambda e_0,$$

而在第二种情形下A应换为A_θ。矩陣(194)中的元显然可由公式

$$a_{lk} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda P_k(\lambda) P_l(\lambda) d\rho(\lambda)$$

表示。現在来証明：尽管区間是无穷的，多項式$P_k(\lambda)$构成关于$\rho(\lambda)$的閉組。

定理 4. 多項式$P_k(\lambda)$构成关于$\rho(\lambda)$的閉組。

設$\varphi_\mu(\lambda)$是这样的一个函数，它在$-\infty < \lambda \leqslant \mu$时等于1，在$\lambda > \mu$时等于零。設$\pi(\lambda)$是取有穷个数值$a_1, a_2, \cdots, a_m$的函数，而每一值$a_k$都是它在有穷区間上取的，则任何这样的函数$\pi(\lambda)$显然可表示为各种$\mu$值的函数$\varphi_\mu(\lambda)$的有穷綫性組合。如果我們对任何$\mu$証明了$\varphi_\mu(\lambda)$的閉性方程，则依广义閉性方程，对函数$\varphi_\mu(\lambda)$的任意綫性組合，这閉性方程也将成立，从而可知它对上述

$\pi(\lambda)$ 这一类型的所有函数都成立。但这种函数所組成的綫性簇在 L_2 中关于 $\rho(\lambda)$ 到处稠密[61]，故 $P_k(\lambda)$ 成閉組[61]。于是，只要对 $\varphi_\mu(\lambda)$ 来証明閉性方程就行了。算出 $\varphi_\mu^2(\lambda)$ 的积分以及这函数的傅立叶系数：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\mu^2(\lambda)d\rho(\lambda) = \int_{(-\infty,\mu]} d\rho(\lambda) = \rho(\mu);$$

$$a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\mu(\lambda)P_k(\lambda)d\rho(\lambda) = \int_{(-\infty,\mu]} P_k(\lambda)d\rho(\lambda)。$$

必須对任何 μ 驗証等式：

$$\rho(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{(-\infty,\mu]} P_k(\lambda)d\rho(\lambda) \cdot \int_{(-\infty,\mu]} P_k(\lambda)d\rho(\lambda)。$$

依閉性方程，我們有

$$\rho(\mu) = \|\mathscr{E}_\mu x_0\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathscr{E}_\mu x_0, x_k)(x_k, \mathscr{E}_\mu x_0),$$

于是只要証明等式

$$(\mathscr{E}_\mu x_0, x_k) = (x_k, \mathscr{E}_\mu x_0) = \int_{(-\infty,\mu]} P_k(\lambda)d\rho(\lambda),$$

上式右边是实数。但这等式可由 e_t 的所指出的积分表示式(見[155])直接得出，于是定理証明了。

再指出判断 (194) 为自共軛矩陣的一个簡單的充分条件。自(195)立即可得公式：

$$b_k \frac{P_{k+1}(\alpha)\overline{P_k(\alpha)} - \overline{P_{k+1}(\alpha)}P_k(\alpha)}{\alpha - \bar{\alpha}} =$$

$$= |P_k(\alpha)|^2 + b_{k-1}\frac{P_k(\alpha)\overline{P_{k-1}(\alpha)} - \overline{P_k(\alpha)}P_{k-1}(\alpha)}{\alpha - \bar{\alpha}},$$

从 $k=0$ 起加到 $k=n-1$，得恒等式：

$$\sum_{k=0}^{n-1} |P_k(\alpha)|^2 = b_{n-1}\frac{P_n(\alpha)\overline{P_{n-1}(\alpha)} - \overline{P_n(\alpha)}P_{n-1}(\alpha)}{\alpha - \bar{\alpha}},$$

特別当 $\alpha = i$ 时有

$$\sum_{k=0}^{n-1}|P_k(i)|^2=b_{n-1}\frac{P_n(i)\overline{P_{n-1}(i)}-\overline{P_n(i)}P_{n-1}(i)}{2i}=$$

$$=b_{n-1}\operatorname{Im}[P_n(i)\overline{P_{n-1}(i)}]。$$

因 $P_0(\lambda)\equiv 1$，故上式左边 $\geqslant 1$，由此得：

$$\frac{1}{b_{n-1}}\leqslant \operatorname{Im}[P_n(i)\overline{P_{n-1}(i)}]\leqslant|P_n(i)|\cdot|P_{n-1}(i)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}[|P_n(i)|^2+|P_{n-1}(i)|^2],$$

于是，从 $n=1$ 起加到 $n=m+1$，得：

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{b_n}\leqslant\sum_{n=0}^{m+1}|P_n(i)|^2,$$

因此，依定理 2，立即可得

定理 5. 若 $1:b_n$ 所組成的級数收斂，則 A 是自共軛运算子。

再指出与上述有直接关系的两个事实，但不加証明。可以証明若 A 有亏指数 $(1, 1)$，則級数 (198) 对任何 α 值收斂。而若 A 是自共軛运算子，則 (198) 对 α 为实数时也發散，但除掉对应于 A 的点譜的那些 α 值，要是有的話。此外，当亏指数为 $(1, 1)$ 时，A 的任何自共軛扩展有純点譜。

我們来看埃尔密特多項式，作为雅科比矩陣的例子。我們冣用等式

$$H_k(\lambda)=(-1)^k e^{\lambda^2}\frac{d^k}{d\lambda^k}(e^{-\lambda^2}) \tag{199}$$

来定义埃尔密特多項式，并已得出关系式

$$\lambda H_k(\lambda)=\frac{1}{2}H_{k+1}(\lambda)+kH_{k-1}(\lambda) \tag{200}$$

及积分等式[III; 220, 221]

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda^2}H_k^2(\lambda)\,d\lambda=2^k k!\sqrt{\pi}。 \tag{201}$$

为使以后能得出規格化多項式，代替 (199) 而引入多項式

$$P_k(\lambda)=\frac{(-1)^k}{\sqrt{2^k k!}}e^{\lambda^2}\frac{d^k}{d\lambda^k}(e^{-\lambda^2}), \tag{202}$$

之后，关系式 (200) 就改写为以下形式

$$\lambda P_k(\lambda)=\sqrt{\frac{k+1}{2}}P_{k+1}(\lambda)+\sqrt{\frac{k}{2}}P_{k-1}(\lambda),$$

而 $P_0(\lambda)=1$。于是，若取雅科比矩陣，設

$$a_k=0;\quad b_k=\sqrt{\frac{k+1}{2}}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),$$

則得多項式(202)，且成立以下公式[見 III;220]:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2}P_k(\lambda)P_l(\lambda)\,d\lambda=\begin{cases}0 & \text{当 } k\neq l,\\ 1 & \text{当 } k=l,\end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2}\lambda P_k(\lambda)P_l(\lambda)\,d\lambda=\begin{cases}0 & \text{当 } |k-l|\neq 1,\\ \sqrt{\frac{k}{2}} & \text{当 } l=k+1。\end{cases}$$

自定理5可以推出，在所設情形下 A 是自共軛运算子。留意上面写的积分公式，可証对运算子 A:

$$\rho(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\lambda}e^{-\mu^2}d\mu。$$

运算子 A 有分布在全部区間$(-\infty,\ +\infty)$上的簡單連續譜。

180. 矩陣及运算子 我們来研究矩陣与希勒柏特空間內对称运算子之間的关系。先設在这空間內給定有界自共軛运算子 A，并設 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots$ 是 H 中的元所組成的任一完全規格化正交組，用公式

$$a_{nk}=(A\varphi_k,\ \varphi_n)=(\varphi_k,\ A\varphi_n)\quad (a_{kn}=\bar{a}_{nk})\tag{203}$$

确定一矩陣 a 的諸元，得：

$$x'_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}x_k,\tag{204}$$

其中 x_k 是某个元 x 的各分量，即 $x_k=(x,\varphi_k)$，而 x'_k 是其映像的各分量，即 $x'_k=(Ax,\ \varphi_k)$。所以，选取了一定的坐标基之后，运算子 A 可依公式(204)用矩陣来表示。若取另一組坐标基 $\psi_1,\ \psi_2,\ \cdots$，而 U 是使 $U\varphi_k=\psi_k(k=1,\ 2,\ \cdots)$ 的么映像，且 $u_{pq}=(U\varphi_q,\ \varphi_p)=(\psi_q,\ \varphi_p)$，則运算子 A 将有一矩陣与之对应，其各元为：

$$b_{nk}=(A\psi_k,\ \psi_n)=\sum_{s=1}^{\infty}(A\psi_k,\ \varphi_s)\ \overline{(\psi_n,\ \varphi_s)}=$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}(\psi_k,\ A\varphi_s)\ \overline{(\psi_n,\ \varphi_s)}=$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}\overline{(\psi_n,\varphi_s)}\ \sum_{t=1}^{\infty}(\psi_k,\ \varphi_t)\ \overline{(A\varphi_s,\ \varphi_t)},\qquad(205)$$

而这里应用了[95]中的广义閉性方程 (18_1)。留意以上所引进的記号,可写出:

$$b_{nk}=\sum_{s=1}^{\infty}\bar{u}_{sn}\sum_{t=1}^{\infty}a_{st}u_{tk}。\qquad(206)$$

如果把这公式应用到 $b_{kn}=\bar{b}_{nk}$ 上,取共軛量,而在右边把字母 s 换为 t,把 t 换为 s,則得:

$$b_{nk}=\sum_{t=1}^{\infty}u_{tk}\sum_{s=1}^{\infty}\bar{u}_{sn}\,a_{st}。\qquad(207)$$

完全同样地,可得:

$$a_{nk}=\sum_{s=1}^{\infty}u_{ns}\sum_{t=1}^{\infty}b_{st}\bar{u}_{kt}=\sum_{t=1}^{\infty}\bar{u}_{kt}\sum_{s=1}^{\infty}u_{ns}b_{st}。\qquad(208)$$

反之,若給定了滿足[136]中有界性条件的矩陣 $a\{a_{nk}\}$ $(a_{kn}=\bar{a}_{nk})$,且固定 H 中的一組坐标基 $\varphi_k(k=1,\ 2,\ \cdots)$,則公式(204)确定了 A 在 H 中的有界自共軛运算子。这时,矩陣 $\{a_{nk}\}$ 的第 k 列所給出的,是坐标基 φ_k 的映像的各分量,故可写

$$A\varphi_k=\sum_{n=1}^{\infty}a_{nk}\varphi_n。\qquad(209)$$

矩陣与无界运算子間的关系比这要复杂些。以后,凡滿足对称条件 $(a_{kn}=\bar{a}_{nk})$ 以及条件(191)的矩陣,叫做 C 矩陣。設有閉对称运算子 D,其綫性簇 $l(D)$ 在 H 中处处稠密。取完全規格化正交組 φ_k,使所有 φ_k 都是屬于 $l(D)$ 的,再用公式(203),把其中的 A 换成 D,定出矩陣 $\{a_{nk}\}$ 的各元。依矩陣 D 的对称性以及閉性方程,可以断言 $\{a_{nk}\}$ 是 C 矩陣。对数积 $(Dx,\ \varphi_n)=(x,\ D\varphi_n)$ 应用广义閉性方程,并設 $x\in l(D)$,得:

$$x'_n=(Dx,\ \varphi_n)=\sum_{k=1}^{\infty}(x,\ \varphi_k)\ (\overline{D\varphi_n,\ \varphi_k})=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}x_k,$$

就是說，运算子 D 可借公式 (204) 用坐标基 φ_k 来表示。綫性簇 $l(D)$ 显然包含所有的"有穷元"，就是說，包含坐标基的一切有穷綫性組合，并且，由于[178]中依矩陣 $\{a_{nk}\}$ 而定义的运算子 A，乃是用公式 (204) 定义在"有穷元"所成綫性簇上的运算子 A' 的閉包，故可断言 $A\subseteq D$；于是 $D^*\subseteq A^*$，就是說，D^* 也是由公式(204)定义在相应綫性簇 $l(D^*)$ 上的。若 D 是 A 的扩展，则依[169]中的定理 7，$l(D^*)$ 只是[178]中所定的 $l(B)$ 的部分。这时，同一矩陣給出不同的运算子。若不取 φ_k 而取另一組坐标基 ψ_k，也是屬于 $l(D)$ 的，则运算子 D 可用矩陣 $\{b_{nk}\}$ 来表示，而且也跟以上一样，公式(204)及(209)成立，不过其中的 a_{nk} 換成 b_{nk}。現設所給的不是运算子而是 C 矩陣 $\{a_{nk}\}$。自 H 中任取一組坐标基 φ_k，并用公式(204)或(209)，在"有穷"元組成的綫性簇 $l(A')$ 上定义运算子 A'。取 A' 的閉包，得出一閉对称运算子 A[178]。我們將說运算子 A 是由矩陣 $\{a_{nk}\}$ 及坐标基組 φ_k 所产生的，并把这事記为 $A\sim a_{nk}\{\varphi_k\}$。事实上用这种方法可得出 H 中的任何閉对称运算子。

定理 1. 任何对称閉运算子 A，其 $l(A)$ 在 H 中处处稠密的，都可用一 C 矩陣及一組坐标基产生出来。

只要作出 $l(A)$ 中的对应坐标基 φ_k 就行了。矩陣則可用公式(203)来确定。这些坐标基 φ_k 应具有以下性質：对 $l(A)$ 中的任何 x，存在"有穷元"所組成的这样的序列 ω_n，使 $\omega_n\Rightarrow x$ 及 $A\omega_n\Rightarrow Ax$。为得出这种 φ_k，只要自 $l(A)$ 中作这样的序列 ω'_n，使对 $l(A)$ 中的任何 x，存在这样的子序列 $\omega'_{n_1}, \omega'_{n_2}, \cdots$，适合 $\omega'_{n_k}\Rightarrow x$ 以及 $A\omega'_{n_k}\Rightarrow$ $\Rightarrow Ax$。将 ω'_{n_k} 正交化之后，显然便得出 φ_k，而由 $\omega'_{n_k}\to x$ 以及 $l(A)$ 在 H 中处处稠密这一事实，可知序列 ω'_n 在 H 中处处稠密，故坐

标基組 φ_k 是完全組。現在来作 ω'_n。取在 H 中处处稠密的任一元序列 $\chi_1, \chi_2, \cdots$。設 p, q, r 是任何三个成一組的正整数。如果 $l(A)$ 中至少有这样的一个元 x 存在，使 $\|\chi_p - x\| \leqslant \frac{1}{r}$ 及 $\|\chi_q - Ax\| \leqslant \frac{1}{r}$，我們就讓这样的一个元 x 与上述 p, q, r 这一組数相对应，并把它記为 $x_{p,q,r}$。这些元显然是可編号的 [1]，于是我們来証明它們具有 ω'_n 所需要的性質。設 $x \in l(A)$ 而 ε 是給定的正数。取 r，滿足不等式 $\frac{1}{r} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ 的，以及取这样的元 χ_p 及 χ_q，使 $\|\chi_p - x\| \leqslant \frac{1}{r}$，$\|\chi_q - Ax\| \leqslant \frac{1}{r}$；这是可能的，因 χ_n 在 H 中处处稠密。这时，存在这样的元 $x_{p,q,r}$，使 $\|\chi_p - x_{p,q,r}\| \leqslant \frac{1}{r}$ 及 $\|\chi_q - Ax_{p,q,r}\| \leqslant \frac{1}{r}$，由此，若留意

$$\|x - x_{p,q,r}\| \leqslant \|\chi_p - x\| + \|\chi_p - x_{p,q,r}\|;$$
$$\|Ax - Ax_{p,q,r}\| \leqslant \|\chi_q - Ax\| + \|\chi_q - Ax_{p,q,r}\|$$

以及 $\frac{1}{r} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ 这一事实，便得：$\|x - x_{p,q,r}\| \leqslant \varepsilon$ 及 $\|Ax - Ax_{p,q,r}\| \leqslant \varepsilon$。而由于 ε 是任意的，由此知 $x_{p,q,r}$ 具有以上要求序列 ω'_n 所具有的性質；定理証明了。

同一个閉对称运算子，可能是由不同的矩陣及坐标基所产生的。若 $A \sim a_{nk}\{\varphi_k\}$ 及 $A \sim b_{nk}\{\psi_k\}$，則在引入上述么范运算子 U 并設 $u_{pq} = (\psi_q, \varphi_p)$ 后，便得公式(206)，(207) 及(208)。还要指出的是，若 D 是給定了的对称閉运算子，坐标基組 φ_k 是屬于 $l(D)$ 的，$\{a_{rk}\}$ 是公式 (203) 所定的矩陣，但其中的 A 換成 D，而 $A \sim a_{nk}\{\varphi_k\}$，則 D 或与 A 重合，或是 A 的扩展，如以上所曾看到的。

181. C 矩陣的么范相抵 上节中，两組 $a_{nk}\{\varphi_k\}$ 及 $b_{nk}\{\psi_k\}$ 产生同一运算子 A。这时，若考察以 φ_k 为坐标基的么范映像 $U\varphi_k = \psi_k$，則数 u_{pq} 是相应于这映像的矩陣中的元。公式(206)中

的內和是数积$(A\psi_k, \varphi_s)$，于是，依閉性方程，可以断言这和的模的平方，在对 s 求和时成一收斂級数。(207) 式中的內和可由 (206) 式中的內和得出，这只要取后者的共軛量，将 s 及 t 换次序，并将 k 换为 n，故(207)中的內和对 t 求和时，上述結論也成立，即

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left|\sum_{t=1}^{\infty} a_{st}u_{tk}\right|^2<\infty;\quad \sum_{t=1}^{\infty}\left|\sum_{s=1}^{\infty}\bar{u}_{sn}a_{st}\right|^2<\infty。\qquad(210)$$

这使我們要作出如下的定义：

定义 1. 若条件(210)成立且若累次和(206)及(207)有同一結果，則說么范矩陣 $\{u_{pq}\}$ 可应用于 C 矩陣 $\{a_{nk}\}$。所得的矩陣 $\{b_{nk}\}$ 称为映像矩陣。

由$\{a_{nk}\}$是 C 矩陣以及 $\{u_{pq}\}$ 是么范矩陣这一事实，依柯西不等式，可知 (206) 及 (207) 中的內級数都是絕对收斂的，而自条件 (210) 又知它們的外級数也是收斂的。依以上所說关于內級数的事，可知 (210) 中若有一个条件满足則另一个条件也就隨之满足。自(206)及(207)立即可知 $b_{kn}=\bar{b}_{nk}$，于是由条件(210)以及$\{u_{pq}\}$之为么矩陣，可知将 $|b_{nk}|^2$ 各項对 k 求和的結果是有劣的，就是說，$\{b_{nk}\}$ 是 C 矩陣。現在来証以下的定理：

定理 2. 若么范矩陣 U 可应用于 $\{a_{nk}\}$，則逆矩陣 U^{-1} 可应用于 $\{b_{nk}\}$，而映像矩陣是 $\{a_{nk}\}$。

我們有下面的公式：

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{pn}b_{nk}=\sum_{t=1}^{\infty} a_{pt}u_{tk};\qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}\bar{u}_{qk}=\sum_{s=1}^{\infty}\bar{u}_{sn}a_{sq}。\qquad(211)$$

只要証明第一个公式就够了。第二个的証明相仿。我們有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{pn}b_{nk}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{s=1}^{\infty}\left(\sum_{t=1}^{\infty} a_{st}u_{tk}\right)\bar{u}_{sn}\right]u_{pn}。$$

依 (210)，圓括号里的和可看做 l_2 中某个元 ξ 的各分量 ξ_s。把 l_2 中由矩陣 $\{u_{pq}\}$ 实現的么范运算子記为 γ，可把上一公式的右边写为：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma^{-1}\xi)_n u_{pn}=[\gamma(\gamma^{-1}\xi)]_p=\xi_p=\sum_{k=1}^{n}a_{pk}u_{nk},\qquad(212)$$

由此立即可得(211)中的第一个公式。自(211)立即可知：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{n=1}^{\infty}u_{pn}b_{nk}\right|^2<\infty;\quad\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}b_{nk}\bar{u}_{qk}\right|^2<\infty。\qquad(213)$$

事实上，若引用記号 $\eta_t=\bar{a}_{pt}$，便得 l_2 中有分量 η_t 的元 η，于是(211)中的第一个公式可写为 $(\overline{\gamma^{-1}\eta})_k$，由此便得(213)中的第一个条件，第二个条件的証明也相仿。再引入 l_2 中以 $\eta'_n=\bar{b}_{nk}$ 为分量的元 η'，可把(211)的第一式写为：$(\gamma\eta')_p=(\overline{\gamma^{-1}\eta})_k$，由此得 $(\gamma^{-1}\eta)_k=$ $=(\overline{\gamma\eta'})_p$。用 u_{qk} 乘并对 k 求和，得：

$$\bar{a}_{pq}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\bar{u}_{pn}\bar{b}_{nk}\right)u_{qk},$$

这便是(208)中的一式。第二式的証明相仿；定理証明了。

若 $a_{nk}\{\varphi_k\}$ 及 $b_{nk}\{\psi_k\}$ 都含有完全坐标基組，我們来給出 $a_{nk}\{\varphi_k\}$ 及 $b_{nk}\{\psi_k\}$ 这两組是么范相抵的定义。

定义 2. 两組 $a_{nk}\{\varphi_k\}$ 及 $b_{nk}\{\psi_k\}$ 叫做么范相抵的，如果以 $u_{pq}=(\psi_q,\varphi_p)$ 为元的么范矩陣 U 可应用于 $\{a_{nk}\}$ 而得映像矩陣 $\{b_{nk}\}$。

若定义中的条件满足，則自所証定理可知，与以 u_{pq} 为元的矩陣 U 相逆的这一么范矩陣，即是說，以 $u^*_{pq}=\bar{u}_{qp}=(\varphi_q,\psi_p)$ 为元的这一矩陣，可应用于 $\{b_{nk}\}$ 而得出映像矩陣 $\{a_{nk}\}$，即是說，两組的么范相抵是双方面的关系。还要指出的是 $U\varphi_k=\psi_k$ 以及 $U^{-1}\psi_k=\varphi_k$。从組与組的相抵意义上說很重要的是下一定理：

定理 3. 为使两組 $a_{nk}\{\varphi_k\}$ 及 $b_{nk}\{\psi_k\}$ 是么范相抵的，必要且充分的条件是它們所产生的閉对称运算子 A 及 A_1 有同一对称运算子 D 作为它們的扩展。

先証必要性。設两組是么范相抵的，則

$$(A\varphi_p,\psi_q)=\sum_{s=1}^{\infty}(A\varphi_p,\varphi_s)(\varphi_s,\psi_q)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{sp}\bar{u}_{sq},$$

$$(\varphi_p, A_1\psi_q) = \sum_{s=1}^{\infty} (\psi_s, A_1\psi_q)(\varphi_p, \psi_s) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{qs}\bar{u}_{ps},$$

而(211)中的第二式告訴我們：$(A\varphi_p, \psi_q) = (\varphi_p, A_1\psi_q)$。这等式对 φ_p 及 ψ_q 的有限綫性組合显然也是成立的。留意 $l(A)$ 及 $l(A_1)$ 的定义，并在数积中取極限，則若 $x\in l(A)$ 而 $y\in l(A_1)$，便得

$$(Ax, y) = (x, A_1y), \tag{214}$$

若 x 同时屬于 $l(A)$ 及 $l(A_1)$，則除(214)外，$(A_1x, y) = (x, A_1y)$，于是，依(214)，对 $l(A_1)$ 中的任何 y 有 $(Ax - A_1x, y) = 0$，而由于 $l(A_1)$ 在 H 中处处稠密，故有 $Ax = A_1x$。

設 $l(D)$ 是由形式可表为 $x = x' + y'$ 的那些元 x 所成的綫性簇，其中 $x'\in l(A)$ 及 $y'\in l(A_1)$，且設 $Dx = Ax' + A_1y'$。如果有两种表达式：$x = x' + y' = x'' + y''$，其中 x' 及 $x''\in l(A)$，而 y' 及 $y''\in l(A_1)$，則由 $x' - x'' = y'' - y'$ 可知 $x' - x''$ 及 $y'' - y'$ 是同时屬于 $l(A)$ 及 $l(A_1)$ 的，于是，依上述，有 $Ax' - Ax'' = A_1y'' - A_1y'$，就是說，$Ax' + A_1y' = Ax'' + A_1y''$，由此可知 Dx 是唯一确定的。依(214)与 A 及 A_1 的对称性，可知 D 是对称运算子。这 D 显然是 A 及 A_1 的扩展，于是必要性証明了。

今設对称运算子 D 是 A 及 A_1 的扩展。我們有：

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{\infty} a_{pt}u_{tk} &= \sum_{t=1}^{\infty} (A\varphi_t, \varphi_p)(\psi_k, \varphi_t) = \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} (\psi_k, \varphi_t)\overline{(A\varphi_p, \varphi_t)} = (\psi_k, A\varphi_p) = \\ &= (\psi_k, D\varphi_p) = (D\psi_k, \varphi_p) = (A_1\psi_k, \varphi_p) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_1\psi_k, \psi_n)(\psi_n, \varphi_p) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{pn}b_{nk},\end{aligned}$$

就是說，得出了(211)中的第一式。完全相仿地可得第二式。重复定理2的証明，便知 $\{u_{pq}\}$ 可应用于 $\{a_{nk}\}$，于是公式(206)，(207)及(208)成立；两組的么范相抵証明了。

自定理可知，組与組間的么范相抵性完全可由它們所产生的

閉对称运算子而定，因此，自然可将么范相抵的概念从組本身推到它們所产生的閉对称运算子上。由此立即可知，有界运算子只与它自身么范相抵，而極大运算子只与它的部分相抵。么范相抵性是双方面相互的性質，但不是可傳遞的，即是說，若运算子 C_1 与 C_2 么范相抵，而 C_2 与 C_3 么范相抵，則由此还不能推出 C_1 与 C_3 么范相抵。但若 C_2 是極大运算子，那就可以有傳遞性，因这时 C_1 及 C_3 都以 C_2 为其公共扩展。C 矩陣的一般理論与有界自共軛运算子所对应的矩陣的理論根本不同。C 矩陣的这一理論在 J. Neumann 的論文 Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen (Crelle, Journal, Bd. 161, 1929) 以及 Wintner 的 Spektraltheorie der unendlichen Matrizen (Leipzig, 1929) 一書中都有闡述。

182. 譜函数的存在 現在来証明[155]中的基本定理：对任何自共軛运算子 A，存在主單位元分解 $\mathscr{E}_\lambda$，借此可用 [155] 中的斯提勒杰斯积分(9)来表示 A。証明过程中，A 的那些性質，凡是不必用公式(9)来推出的，都可利用。在[157]中，我們不用这公式証明下一事实：对任何不是实数的 λ，存在有界运算子 $(A-\lambda E)^{-1}$，定义在整个 H 上，使公式 $x=(A-\lambda E)u$ 将 $l(A)$ 双方單值地映像为 H。我們来看 $\lambda=\pm i$ 的情形，并設：

$$x=(A-iE)u \qquad y=(A+iE)v$$
$$(u\in l(A)); \qquad (v\in l(A))$$

于是

$$u=(A-iE)^{-1}x \qquad v=(A+iE)^{-1}y$$
$$(x\in H); \qquad (y\in H)。$$

由于 A 是自共軛的，則对 H 中的任何 x 及 y 有：

$$((A-iE)^{-1}x, y)=(u, (A+iE)v)=(Au, v)-i(u, v),$$
$$(x, (A+iE)^{-1}y)=((A-iE)u, v)=(Au, v)-i(u, v)。$$

由此可知以上两等式的左边是相同的，就是説 $[(A-iE)^{-1}]^*=(A+iE)^{-1}$。引入有界自共軛运算子[98]

$$C=\frac{1}{2}[(A-iE)^{-1}+(A+iE)^{-1}];$$
$$B=\frac{1}{2i}[(A-iE)^{-1}-(A+iE)^{-1}], \tag{215}$$

得：

$$(A-iE)^{-1}=C+iB,\quad (A+iE)^{-1}=C-iB,\tag{216}$$

且当 x 为 H 中任意取的元时，元 Cx 及 Bx 屬于 $l(A)$。自 (216) 得：

$$(A-iE)(C+iB)=(AC+B)+i(AB-C)=E,$$
$$(A+iE)(C-iB)=(AC+B)-i(AB-C)=E,$$

由此得

$$AC=E-B;\tag{217}$$
$$AB=C\tag{218}$$

若元 x 屬于 $l(A)$，則还可以写出：$(C+iB)(A-iE)x=x$ 及 $(C-iB)(A+iE)x=x$，解开括号，并将其与以上写出的相比較，得：

$$ACx=CAx;\quad ABx=BAx\tag{219}$$
$$(x\in l(A)),$$

就是說，有界运算子 B 及 C 在[159]中所定的意义下与 A 相交换。

自公式 $BC=BAB=ABB=CB$，可知

$$CB=BC,\tag{220}$$

就是說，B 及 C 可互相交换。利用 (217) 及 (218)，可得 $B=BE=B(B+C)=B^2+BAC=B^2+ABC=B^2+C^2$，就是說，$B$ 是正运算子。其次，自公式

$$\|x\|^2=\|(A-iE)u\|^2=((A-iE)u,\ (A-iE)u)=\|Au\|^2+\|u\|^2,$$
$$\|y\|^2=\|Av\|^2+\|v\|^2,$$

可知 $\|u\|\leqslant\|x\|$，$\|v\|\leqslant\|y\|$，就是說，运算子 $(A-iE)^{-1}$ 及 $(A+iE)^{-1}$ 的范数不超过 1，故依 (215) 可知 B 及 C 的范数也不超过 1。再証明自 $Bx=0$ 可得 $x=0$。事实上，若 $Bx=0$，則 $(Bx,x)=(B^2x,x)+(C^2x,x)=0$，即，$(Bx,Bx)+(Cx,Cx)=0$，或即 $\|Bx\|^2+\|Cx\|^2=0$，由此知 $Cx=0$。这样公式 (217) 就給出：$x=Bx+ACx=0$。除了运算子 B 及 C 的这些性質以外，还需要一个輔助定理，其証明見下面。

輔助定理　設 $M_n(n=1,2,\cdots)$ 是两两互相正交的子空間，其正交和給出整个 H。又設在每个 M_n 中定义了有界自共軛运算子 A_n。这时 H 中存在唯一的自共軛运算子 A，它在 M_n 中則与 A_n 一致。組成綫性簇 $l(A)$ 的，是使以 $\|A_nx_n\|^2$ 为項的級数收斂的那些元 x，其中 x_n 是 x 在 M_n 中的投影，而对这些 x，我們有

$$Ax=\sum_n A_nx_n。\tag{221}$$

再来考察运算子 B 及 C。B 的譜在綫段[0, 1]上，而由于 $Bx=0$ 可得 $x=0$，

故点 $\lambda=0$ 不屬于点譜，因此，若用 $\mathscr{E}'_\lambda$ 記运算子 B 的譜函数，則 $\mathscr{E}'_0=0$。用 M_n 来記运算子$\left(\mathscr{E}'_{\frac{1}{n}}-\mathscr{E}'_{\frac{1}{n+1}}\right)$所投影的子空間，則可斷言 M_n 是两两正交的，而且它們的正交和等于 H。若有界自共軛运算子 D 与 $\mathscr{E}'_\lambda$ 交换，則依 [110] 中的定理 39，M_n 簡約 D。这对 C 以及 B 的任何实連續函数将是成立的[110]。設 $\varphi_n(\lambda)=1:\lambda$ 若 $\frac{1}{n+1}\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{n}$，而在这区間之外等于常数，但保持端点处的連續性；又引入有界自共軛运算子 $\varphi_n(B)$。若 $z\in M_n$，則 $\mathscr{E}'_\lambda z=z$ $\left(当 \lambda\geqslant\frac{1}{n}\right)$ 以及 $\mathscr{E}'_\lambda z=0$ $\left(当 \lambda\leqslant\frac{1}{n+1}\right)$。这可由公式

$$\mathscr{E}'_\lambda z=\mathscr{E}'_\lambda\left(\mathscr{E}'_{\frac{1}{n}}-\mathscr{E}'_{\frac{1}{n+1}}\right)z$$

以及 $\mu\leqslant\lambda$ 时 $\mathscr{E}'_\mu\mathscr{E}'_\lambda=\mathscr{E}'_\lambda\mathscr{E}'_\mu=\mathscr{E}'_\mu$ 立即得出。若借助于 $\mathscr{E}'_\lambda$ 用斯提勒杰斯积分来表示 $\varphi_n(B)z$ 及 Bz，并应用 $\varphi_n(\lambda)$ 的定义以及剛才关于 $\mathscr{E}'_\lambda z$ 所說的結果，則得：在 M_n 中 $\varphi_n(B)B=B\varphi_n(B)=E$，就是說，在 M_n 中 B 与 $\varphi_n(B)$ 是互逆的。若 $z\in M_n$，則可写 $z=B\varphi_n(B)z$，由此知道自 $z\in M_n$ 可得 $z\in l(A)$。利用(218)，可写：$Az=AB\varphi_n(B)z=C\varphi_n(B)z$，由此知 A 是 M_n 中的有界运算子。再留意 C 与 $\varphi_n(B)$ 是交换的，且 M_n 簡約 C 及 $\varphi_n(B)$，便可斷言 A 是 M_n 中的有界自共軛运算子。用 $\mathscr{E}^{(n)}_\lambda$ 来記 M_n 中与这运算子相应的主單位元分解。依輔助定理，可作 H 中的自共軛运算子 $\mathscr{E}_\lambda$：

$$\mathscr{E}_\lambda x=\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}^{(n)}_\lambda x; \tag{223}$$

并且不难驗証 $\mathscr{E}_\lambda$ 是 H 中的主單位元分解。若作斯提勒杰斯积分确定一自共軛运算子[155]，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda d\mathscr{E}_\lambda x,$$

則若留意 $x\in M_n$ 时 $\mathscr{E}_\lambda x=\mathscr{E}^{(n)}_\lambda x$，便可知这运算子在 $x\in M_n$ 时給出了 A，从而依輔助定理可知它定义了 A。現在还待証明的是上述輔助命題。

設組成綫性簇 $l(A)$ 的那些元滿足

$$\sum\|A_nx_n\|^2<\infty,$$

而 x 屬于 $l(A)$；用公式 $Ax=A_1x_1+A_2x_2+\cdots$ 定义运算子 A。証明 A 是自共軛运算子。元 x_n 的有穷和显然是屬于綫性簇 $l(A)$ 的，故綫性簇 $l(A)$ 在 H 中处处稠密。A 的对称性可由 A_n 的自共軛性以及公式

$$(Ax, y)=\left(\sum_n A_nx_n, \sum_n y_n\right)=\sum_n(A_nx_n, y_n)=\sum_n(x_n, A_ny_n)=$$

$$=\left(\sum_n x_n, \sum_n A_ny_n\right)=(x, Ay)$$

推出，其中 x 及 $y\in l(A)$，并且应用了数积的連續性及分配性以及子空間 M_n 的正交性。所以，$A^*\supseteq A$，于是要証明 $x\in l(A^*)$ 时則 $x\in l(A)$。留意 $A^2x_n\in M_n$ 以及 $x-x_n\perp M_n$，可写出

$$(A^*(x-x_n),\ Ax_n)=(x-x_n,\ A^2x_n)=0,$$

由此，依毕达哥拉定理，当 $n=1$ 时

$$\|A^*x\|^2=\|A^*(x-x_1)\|^2+\|Ax_1\|^2。$$

完全类似地，可写出：

$$\|A^*(x-x_1)\|^2=\|A^*(x-x_1-x_2)\|^2+\|Ax_2\|^2,$$

也就是

$$\|A^*x\|^2=\|A^*(x-x_1-x_2)\|^2+\|Ax_1\|^2+\|Ax_2\|^2,$$

而一般則有

$$\|A^*x\|^2=\|A^*(x-x_1-x_2-\cdots-x_n)\|^2+\sum_{k=1}^{n}\|Ax_k\|^2,$$

由此得：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|A_nx_n\|^2\leqslant\|A^*x\|^2,$$

故 $x\in l(A)$；A 的自共軛性于是証明了。还要証明的是：存在唯一的自共軛运算子，在 M_n 上与 A_n 一致。設除了以上所作的 A 外还有 A'。自 A' 的自共軛性可知它是閉的。对有穷和有

$$A'\sum_{k=1}^{m}x_k=A\sum_{k=1}^{m}x_k=\sum_{k=1}^{m}Ax_k,$$

因 A 与 A' 在 M_n 上一致。留意 A' 的閉性，便可斷言 A' 定义在 $l(A)$ 上且在該綫性族上与 A 一致，即 $A'\supseteq A$。另一方面，若在以上的証明中将 A^* 換为 A'，則可知：若 $x\in l(A')$ 則 $x\in l(A)$，从而 A' 与 A 一致；輔助定理証明了。

第五章　一般空間

183. 賦范空間。例　定义空間 H 时数积的概念起着基本的作用。元 x 的范数平方定义做数积 (x, x)。現在定义更一般的抽象空間 B，其中并不存在数积的概念，但有元的范数的概念。我們保存[92]中所論的第一群公理。設对于每一元 x 有一确定的非負数 $\|x\|$ 相应，这数叫做元 x 的范数，而这范数滿足下面三个公理：

$$1.\ \|\theta\|=0,\ \text{如}\ x\neq\theta,\ \text{則}\ \|x\|>0;\quad 2.\ \|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|;$$

$$3.\ \|ax\|=|a|\,\|x\|,$$

其中 θ 表示零元，而 a 表示任意数。两元 x 及 y 之間的距离定义做差的范数 $\|x-y\|$。与以前一样，我們写做 $x_n\Rightarrow x$，是指 $\|x-x_n\|\to 0$（强收斂）。依第二公理，由 $x_n\Rightarrow x$ 可知当无限地增大 m 及 n 时 $\|x_n-x_m\|\to 0$，而序列只能有一个極限。賦范空間叫做完备的，是指由 $\lim\limits_{m\to\infty,\ n\to\infty}\|x_n-x_m\|=0$ 可知存在一元 x，使 $x_n\Rightarrow x$。現在举几个賦范空間的例。

空間 C，其元是閉区間 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的連續函数 $x(t)$，其范数是 $\|x\|=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$。这 C 是完备賦范空間[15]。空間 L_p：其元是在 $[a, b]$ 上可測并且 $|x(t)|^p$ 可和的函数 $x(t)$，其范数是

$$\|x(t)\|=\left[\int_a^b|x(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{1}$$

这空間 L_p 是完备的賦范空間[63]。这两个例很容易推广到多变数函数上去。做为另一例，考察空間 $l_p\,(p\geqslant 1)$，其中的元是复数序列 $x(x_1, x_2, \cdots)$，而級数 $\sum|x_k|^p$ 收斂。范数由下面公式定义：

$$\|x\|=\left[\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}。 \tag{2}$$

这些空間都曾在前面討論过了。

再举出空間 m，其中的元是复数序列 $x(x_1, x_2, \cdots)$，而序列 $|x_1|, |x_2|, \cdots$ 是有界的。元的范数定义做絕对值 $|x_k|$ 的上确界：

$$\|x\| = \sup_k |x_k|。\tag{3}$$

元的加法及用数乘的乘法都与在 l_2 中一样。关于范数及完备性的公理都与在 l_2 中一样地証明。

在上述諸空間中綫性泛函及其范数都与在 H 中完全一样地定义。在空間 C 中，我們已知[15]綫性泛函的一般形式乃是斯提勒杰斯积分。考察 l_p 及 L_p 中的綫性泛函，并設 $p>1$。令

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k; \tag{4}$$

$$f(x) = \int_a^b a(t) x(t) dt, \tag{5}$$

其中 $(a_1, a_2, \cdots)$ 是 $l_{p'}$ 中的某固定元，而 $a(t) \in L_{p'}$，并且 $p' = p:(p-1)$。不难看出，上写的公式定义 l_p 及 L_p 中的一些泛函。其分配性是显然的，而其有界性可以由对于和及积分的赫勒德尔不等式得出。例如

$$|f(x)| \leqslant \left[\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{p'}\right]^{\frac{1}{p'}} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}},\ \text{就是說}\ |f(x)| \leqslant \|a\| \cdot \|x\|, \tag{6}$$

其中 $\|a\|$ 是 $l_{p'}$ 中的元 $(a_1, a_2, \cdots)$ 的范数，而 $\|x\|$ 是变元 $(x_1, x_2, \cdots)$ 在 l_p 中的范数。可以証明(4)及(5)給出 l_p 及 L_p 的綫性泛函的一般形式，而 $p>1$，$(a_1, a_2, \cdots)$ 是 $l_{p'}$ 中的任意固定元，$a(t)$ 是 $L_{p'}$ 中的任意固定元。上写的泛函的范数等于 $\|a\|$ 及 $\|a(t)\|$。这直接由(6)及下面事实得出：即在赫勒德尔不等式中对于非零序列 $(x_1, x_2, \cdots)$ 可能使等号适用。我們証明(4)乃是 l_p 中綫性泛函的一般形式。設 $f(x)$ 是 l_p 中的綫性泛函。我們用 $\|f\|$ 表示其范数。設 $x^{(m)}(x_1, x_2, \cdots, x_m, 0, 0, \cdots)$ 是"有穷元"，即其中在第 m 項以后諸項都是零，并設 a_k 是泛函 $f(x)$ 对于第 k 个坐标基的

值。而所謂第 k 个坐标基就是这样的一个元，这元中 $x_k=1$，而当 $l\neq k$ 時 $x_l=0$。依 $f(x)$ 的分配性可知

$$f(x^{(m)})=\sum_{k=1}^{m}a_k x_k。\tag{7}$$

由赫勒德尔不等式可知

$$|f(x^{(m)})|\leqslant\left[\sum_{k=1}^{m}|a_k|^{p'}\right]^{\frac{1}{p'}}\|x^{(m)}\|,$$

而对于某个适当选擇的 $x^{(m)}\neq\theta$，等号适用。另一方面，对于任意 $x^{(m)}$ 都应当有 $|f(x^{(m)})|\leqslant\|f\|\cdot\|x^{(m)}\|$，由此可知对于任意 m，

$$\sum_{k=1}^{m}|a_k|^{p'}\leqslant\|f\|^{p'},$$

所以由 $|a_k|^{p'}$ 組成的級数必收斂。留意在 l_p 中 $x^{(m)}\to x$，而泛函 $f(x)$ 是連續的，由(7)取 $m\to\infty$ 时的極限可得公式(4)，这就是所要証的。完全同样可以証明(4')也是 l_1 中泛函的一般形式，而 $a(a_1, a_2, \cdots)$ 是空間 m 中的任意固定的元，而这泛函的范数等于在空間 m 中元 a 的范数。公式(5)給出 L_1 中泛函的一般形式，其中 $a(t)$ 是任意固定的可测有界函数。

再定义空間 $C^{(p)}$，其中的元是凡在区間 $[a, b]$ 上并其 p 阶导函数都連續的函数 $x(t)$。范数定义成

$$\|x\|=\max|x(t)|+\max|x'(t)|+\cdots+\max|x^{(p)}(t)|;$$

而凡 max 都是在区間 $[a, b]$ 上取的。如此可得一完备賦范空間，但其中的綫性泛函并不常是由积分表示。在这情形中，强收斂 $x_n(t)\to x(t)$ 与下面的条件同效：即在区間 $[a, b]$ 中 $x_n(t)$ 一致收斂于 $x(t)$，而其前 p 阶的导函数各一致收斂于 $x(t)$ 的相应阶导函数。

184. 共轭空間。弱收斂 考察在完备賦范空間 H' 中的一切可能的綫性泛函 $f(x)$。显然，它們可以乘以任意数，并可以相加，如果把这些泛函 $f(x)$ 看做某一新空間 $\overline{H}'$ 中的元，而 $\overline{H}'$ 中的零

元是指使 H' 中任意元满足 $f(x)=0$ 的泛函，那末 [92] 中的一切公理都满足。$\overline{H}'$ 中元 $f(x)$ 的范数是指相应泛函的范数 $\|f\|$。如此显然关于范数的三个公理都满足，就是說，$\overline{H}'$ 是賦范空間。它平常叫做与 H' 共軛的空間。現在証明一定理。

定理 1. 凡共軛空間 $\overline{H}'$ 必是完备空間。

設有綫性泛函 $f_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 的序列，并設对于任意 $\varepsilon>0$ 存在一数 $N(\varepsilon)$，使

$$\text{当 } n\geqslant N \text{ 及 } m>0 \text{ 时 } \|f_{n+m}-f_n\|\leqslant\varepsilon。\qquad (8)$$

我們应当証明，存在泛函 $f(x)$，使 $\|f-f_n\|\to 0$。由 (8) 可知对于 H' 中的任意 x，当 $n\geqslant N$ 及 $m>0$ 时

$$|f_{n+m}(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon\|x\|,\qquad (9)$$

就是說，对于 H' 中的任意元 x，数 $f_n(x)$ 有極限，而这極限乃是一个泛函 $f(x)$。由 $f_n(x)$ 的分配性可得 $f(x)$ 的分配性。現在証明 $f(x)$ 是有界的。作泛函 $\varphi_m(x)=f_{N+m}(x)-f_N(x)$，那末依 (9)，$\|\varphi_m\|\leqslant\varepsilon$，所以对于任意 $m>0$，$\|f_{N+m}\|\leqslant\|f_N\|+\varepsilon$。由此可知存在一数 k，使对于任意 n，$\|f_n\|\leqslant k$，就是說 $|f_n(x)|\leqslant k\|x\|$，取極限可知 $|f(x)|\leqslant k\|x\|$，就是說 $f(x)$ 是在 H' 中的有界泛函。在 (9) 中取 $m\to\infty$ 时的極限，可得对于 $n\geqslant N$，$|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon\|x\|$，由此，既然 ε 是任意的，可知 $\|f-f_n\|\to 0$，于是定理証明了。

既然公式 (4) 給出 l_p 中泛函的一般形式，其中 $p>1$，而 $a(a_1, a_2, \cdots)$ 是 $l_{p'}$ 中的任意固定元，而这泛函的范数等于元 a 在 $l_{p'}$ 中的范数，因此与 l_p 共軛的空間乃是空間 $l_{p'}$，而更精确地說，与 l_p 共軛的空間 $\overline{l}_p$ 与 $l_{p'}$ 等距。$\overline{l}_p$ 及 $l_{p'}$ 中的諸元間有一一对应关系，而 $\overline{l}_p$ 与 $l_{p'}$ 中相应元的范数是相同的。$\overline{l}_p$ 中的元乘以数的乘积及加法与 $l_{p'}$ 中相应元的同样運算相应。同样当 $p'>1$ 时，$\overline{L}_p$ 乃是 $L_{p'}$。如果 $p=2$，那末 $p'=2$，就是說与空間 l_2 及 L_2 相共軛的空間就是它們自己。由上节中所說的可知 $\overline{l}_1$ 就是 m。

再提及与泛函概念緊密联系着的弱收斂。我們說 H' 中元序列 x_n 弱收斂于元 x，并且写成 $x_n \to x$，是指对于任意綫性泛函 f，$f(x_n) \to f(x)$，而諸范数 $\|x_n\|$ 不大于某一与 n 无关的数 k。可以証明关于諸范数 $\|x_n\|$ 有界的要求乃是第一要求的推論。今举弱收斂的例。在 l_p 中，当 $p>1$ 时，元序列 $x^{(n)}(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots)$ 弱收斂于元 $x(x_1, x_2, \cdots)$，与条件范数 $\|x^{(n)}\|$ 有界而 $x_k^{(n)} \to x_k (k=1, 2, \cdots)$ 同效。在 L_p 中，当 $p>1$ 时 $x_n(t) \to x(t)$ 弱收斂与条件范数 $\|x_n(t)\|$ 有界而对于 $[a, b]$ 中任意 t

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^t x_n(u)du = \int_a^t x(u)du \tag{10}$$

同效，而这里設 a 是有穷的。

可以証明，在 l_1 中弱收斂与强收斂同效，而在 L_1 中弱收斂 $x_n(t) \to x(t)$ 与下面条件同效：即范数 $\|x_n(t)\|$ 有界，而諸 $x_n(t)$ 的积分依 n 是一致地絕对連續的，就是說，对于任意預定的正数 ε，必須存在一与 n 无关的正数 η，使

$$\left|\int_{\mathscr{E}} x_n(t)dt\right| \leqslant \varepsilon \quad (n=1, 2, 3, \cdots),$$

如果屬于 $[a, b]$ 的集合 $\mathscr{E}$ 的測度 $\leqslant \eta$（參閱巴拿赫，綫性运算子論）。可以定义泛函的弱收斂，就是說，我們說泛函序列 $f_n(x)$ 弱收斂于泛函 $f(x)$，是指对于 H' 中的任意 x，$f_n(x) \to f(x)$，而諸范数 $\|f_n\|$ 为一个与 n 无关的数所界。可以証明，第二要求是第一要求的推論。此外，在 $\overline{H}'$ 中的强收斂 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$，是指 $\|f-f_n\| \to 0$。

对于諸泛函，在可分空間的情形中[參閱 95]，与[127]中的定理相似的定理成立，就是說，如果諸泛函的范数 $\|f_n\|$ 不超过某与 n 无关的数，那末由諸泛函 $f_n(x)$ 的序列可以选出一个弱收斂的部分序列来。在 l_p 及 L_p 中 $(p>1)$ 泛函的弱收斂与依 (204) 及 (205) 由上述泛函定义的并且屬于 $l_{p'}$ 及 $L_{p'}$ 中的元的弱收斂同效。

185. 綫性运算子 我們只很概括地講一下賦范空間中运算子的問題。令对于某一賦范空間 H_1' 中的任意元 x 各取同空間或另一賦范空間 H_2' 中的元 y 与之相应，$y=Ax$，并設这关系是分配的，而此外存在一正数 k，使 $\|Ax\|\leqslant k\|x\|$，其中范数 $\|x\|$ 是就 H_1' 而取的，而 $\|Ax\|$ 是就 H_2' 而取的。这时，Ax 叫做在 H_1' 中的綫性有界运算子，其值域在 H_2' 中。在上面不等式中出現的常数 k 的下确界叫做运算子 Ax 的范数。現在介紹共軛运算子的概念。令 $F_2(y)$ 是 H_2' 中的某一綫性泛函。这时 $F_2(Ax)$ 显然是 H_1' 中的某一綫性泛函：

$$F_1(x)=F_2(Ax)。\tag{11}$$

如此，$\overline{H}_2'$ 中的每元 F_2 与 $\overline{H}_1'$ 中的某一确定元 F_1 对应，而 $F_1=A^*(F_2)$。这定义于 $\overline{H}_2'$ 中的运算子 A^* 在 $\overline{H}_1'$ 中取值，我們叫它做与 A 共軛的。不难看出，A^* 是有界运算子，而 A^* 的范数与 A 的范数相同。如果 H_1' 及 H_2' 与 H 相合，那末得出与以前一样的自共軛运算子的定义。可以定义全連續运算子 Ax 如下：它把 H_1' 中依范数为同一数所界的元 x 的每一集合都映像成 H_2' 中的一个列緊空間，而列緊性是依照这空間中的收斂性来說的。与以前一样，如果 Ax 是全連續运算子，那末由 H_1' 中 $x_n\rightharpoonup x$ 可知在 H_2' 中 $Ax_n\Rightarrow Ax$。

186. 空間 $C_n^{(p)}$ 及 $H_n^{(p)}$ 我們考察具有偏导数的多变数函数的函数空間。这些导函数是設做連續的，或是依在 [78] 中所述的意义的。下面推理的基本結果將建立起这些空間之間的联系。令 $C_n^{(p)}$ 是連續的并在全 n 維空間中具有 p 阶以前的导函数的一切实函数 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的空間。定义 $C_n^{(p)}$ 中的收斂性如下。我們說 $C_n^{(p)}$ 中函数序列 $\varphi_k(k=1, 2, \cdots)$ 收斂于 $C_n^{(p)}$ 中的函数 φ，是指在空間 R_n 中的任意有界区域 D 中，φ_k 以及其 p 阶以前的一切导函数各一致收斂于 φ 及其各相应阶的导函数，就是說，对于任

意預定的正数 ε，必須存在一个只依从于 ε 及区域 D 的数 N，使 $k\geqslant N$ 时在 D 中

$$\left|\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}-\frac{\partial^\alpha \varphi_k}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right|\leqslant\varepsilon \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\alpha\\ \alpha=0,1,\cdots,p\end{pmatrix}。$$

做为区域 D，显然例如可以只取以原点为中心的球。与平常一样，我們說序列 φ_k 自收斂，是指对于任意預定的正数 ε 必存在一个只依从于 ε 及 D 的数 N，使在 D 中当 l 及 $k\geqslant N$ 时

$$\left|\frac{\partial^\alpha \varphi_l}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}-\frac{\partial^\alpha \varphi_k}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right|\leqslant\varepsilon \tag{13}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\alpha\\ \alpha=0,1,\cdots,p\end{pmatrix}。$$

对于在任意有界区域 D 中一致收斂的級数

$$\varphi=\varphi_1+(\varphi_2-\varphi_1)+(\varphi_3-\varphi_2)+\cdots$$

引用在逐項取导函数后所得級数仍一致收斂的情形中逐項取导函数的合法性定理，可以看出由(13)可得(12)，就是說，由自收斂可以得到收斂于 $C_n^{(p)}$ 中的某元 φ（卽 $C_n^{(p)}$ 是完备的）。在空間 $C_n^{(p)}$ 中显然可以施行乘实常数及相加的运算，就是說，这是一个遵守[92]中公理的矢量空間。

令 $H_n^{(p)}$ 是定义于 R_n 中并具有下列性質的实値函数 φ 的空間：φ 以及其 $(p-1)$ 阶以前的导函数对于其他 $(n-1)$ 个变数在 R_{n-1} 中的几乎一切値都是每个变数 x_s 的絕对連續函数，而此外，φ 自己及其 p 阶以前的导函数都屬于在 R_n 中任意有界区域上的 L_2。上面所說的与下面条件同效：卽 φ 在 R_n 中有 p 阶以前广义导函数，而 φ 自己及其 p 阶以前的导函数都是在任意有界区域 D 中屬于 L_2 的 [78]。$H_n^{(p)}$ 中序列 φ_s 收斂于 $H_n^{(p)}$ 中的元 φ 定义于下：对于任意預定的正数 ε，必存在一只依从于 ε 及 D 的数 N，使

当 $k\geqslant N$ 时

$$\int_D\left[\frac{\partial^\alpha\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}-\frac{\partial^\alpha\varphi_k}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right]^2dx_1\cdots dx_n\leqslant\varepsilon,\qquad(14)$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\alpha\\ \alpha=0,1,\cdots,p\end{pmatrix}。$$

自收斂定义如下：当 k 及 $l\geqslant N$ 时，

$$\int_D\left[\frac{\partial^\alpha\varphi_l}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}-\frac{\partial^\alpha\varphi_k}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right]^2dx_1\cdots dx_n\leqslant\varepsilon$$

$$(\alpha=0,1,\cdots,p),\qquad(15)$$

其中 N 只依从于 ε 及 D。我們証明在 $H_n^{(p)}$ 中由自收斂可知必收斂于 $H_n^{(p)}$ 中某一元 φ。我們只限于考察空間 $H_n^{(1)}$。在一般情形中証法并无不同。应用当 $\alpha=0$ 时的(15)，当 k 及 $l\geqslant N$ 时

$$\int_D(\varphi_l-\varphi_k)^2dx_1\cdots dx_n\leqslant\varepsilon。$$

因为 L_2 是完备的，必存在 D 上 L_2 的函数 φ，使 φ_k 在 D 上依中值收斂于一个 φ。扩展球 D，可得 φ 定义于全 R_n 中，而依中值收斂在任意有界区域中成立。只須証明 $\varphi\in H_n^{(1)}$，而任意导函数 $\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_s}$ 在 D 中依中值收斂于 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_s}$。我們就 $s=1$ 时証明。应用(15)于导函数，可以看出存在一函数 $\psi(x_1,\cdots,x_n)$，值对于任意有界区域 D，

$$\lim_{k\to\infty}\int_D\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}-\psi\right)^2dx_1\cdots dx_n=0。\qquad(16)$$

留意 ψ 及 $\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}$ 在任意有界区域中可和，可知依每个 x_s 必对于其他变数的一切値都仍是可和的，我們可以作函数

$$\left.\begin{aligned}\varphi_k'(x_1,\cdots,x_n)&=\int_0^{x_1}\frac{\partial\varphi_k(x_1',x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1'}dx_1';\\ \psi'(x_1,\cdots,x_n)&=\int_0^{x_1}\psi(x_1',x_2,\cdots,x_n)dx_1',\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

而值导函数的定义

$$\varphi_k(x_1, \cdots, x_n) - \varphi_k'(x_1, \cdots, x_n) = \varphi_k(0, x_2, \cdots, x_n)。 \quad (18)$$

引用舒伐尔兹不等式可得

$$(\varphi_k' - \psi')^2 \leqslant x_1 \cdot \int_0^{x_1} \left[\frac{\partial \varphi_k(x_1', x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_1'} - \psi(x_1', x_2, \cdots, x_n) \right]^2 dx_1'。$$

用 ω 表示最后积分中积分号下的函数(它是非负的),并在区間 Δ_q: $0 \leqslant x_s \leqslant q$ $(s=1, \cdots, n)$ 上积分,其中 q 是任意预定的正数,把在积分号前的 x_1 换成 q,并交换依 x_1' 及依 x_1 的积分次序,可得

$$\int_{\Delta_q} (\varphi_k' - \psi')^2 dx_1 \cdots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant q \int_0^q \int_0^q \left[\int_{x_1'}^q \omega(x_1', x_2, \cdots, x_n) dx_1 \right] dx_1' dx_2 \cdots dx_n。$$

在内积分中有差 $(q - x_1')$,我們可以把它换成 q,并把 x_1' 改写成 x_1,可得

$$\int_{\Delta_q} (\varphi_k' - \psi')^2 dx_1 \cdots dx_n \leqslant q^2 \int_{\Delta_q} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} - \psi \right)^2 dx_1 \cdots dx_n。$$

对于区間 $-q \leqslant x_s \leqslant 0$ 可以得到完全同类的不等式,而既然 q 是任意的,由此可知 φ_k' 在 $H_n^{(0)}$ 中收斂于 ψ'。差 $\varphi_k - \varphi_k'$ 在 $H_n^{(0)}$ 中收斂于 $\varphi - \psi'$,而依(18),可以断定 $\varphi - \psi'$ 与 x_1 无关。留意关于 ψ' 的公式 (17),可以进一步結論 φ 是依 x_1 对于 $x_2, x_3, \cdots, x_n$ 的几乎一切值都是絕对連續的,并且 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \psi$ 屬于在任意有界区域上的 L_2。最后,由(16)可知 $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}$ 在任意有界区域中依中值收斂于 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$。如此 $H_n^{(p)}$ 的完备性証明了。在下节中将建立 $C_n^{(p)}$ 与 $H_n^{(p)}$ 的联系。

187. $C_n^{(p)}$ 与 $H_n^{(p)}$ 間的联系 当有足够多次的广义导函数时,可以保証函数 φ 的連續性,并且它的一直到某阶的导函数存在而且連續;这就是說,下面定理成立:

定理 2. 如果当 $p \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ 时 $\varphi \in H_n^{(p)}$,那末 $\varphi \in C_n^{(r)}$,其中

$r=p-\left[\frac{n}{2}\right]-1$，而由在 $H_n^{(p)}$ 中的收斂可得在 $C_n^{(r)}$ 中的收斂。

我們用記号$[a]$表示非負数 a 的整数部分，就是說当 n 是偶数时$\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n}{2}$，而当 n 是奇数时，$\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n-1}{2}$。首先証明一輔助定理。

輔助定理 如果 $\varphi\in C_n^{(p)}$，而在球体 D 中下面不等式成立：

$$\int_D\left(\frac{\partial^\alpha\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)^2 dx_1\cdots dx_n\leqslant A^2\quad(\alpha=0,1,\cdots,l),\tag{19}$$

那末在任意一个同心的內部球 D_1 中，对于同函数及其 $l-\left[\frac{n}{2}\right]-1$ 阶以前各导函数，下面公式都成立：

$$\left|\frac{\partial^\beta\varphi}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_n^{\beta_n}}\right|\leqslant cA\quad\left(\beta=0,1,\cdots,l-\left[\frac{n}{2}\right]-1\right),\tag{20}$$

其中常数 c 只依从于 D_1 的选擇。

作輔助函数

$$\sigma(x)=\begin{cases}1 & \text{如果 } x\leqslant\frac{1}{3},\\ 0 & \text{如果 } x\geqslant\frac{2}{3},\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{e^u-e^{-u}}{e^u+e^{-u}} & \text{如果 } \frac{1}{3}<x<\frac{2}{3},\end{cases}\tag{21}$$

其中

$$u=\frac{\frac{1}{2}-x}{\left(\frac{2}{3}-x\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)}。$$

当 x 由大值趋向于 $\frac{1}{3}$ 时 $u\to+\infty$，而当 x 由較小的值趋向于 $\frac{2}{3}$ 时 $u\to-\infty$。这时 $\sigma(x)$ 相应地各趋向于 1 及 0，而不难証明 $\sigma(x)$ 当 $x=\frac{1}{3}$ 及 $x=\frac{2}{3}$ 时保存一切导函数的連續性。 設 M_0 是 D_1 中某点，h 是 D 及 D_1 的半徑差。取以 M_0 为中心的球坐标系：

$$x_1=r\cos\theta_1;$$
$$x_2=r\sin\theta_1\cos\theta_2;\ \cdots;\ x_{n-2}=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2};$$
$$x_{n-1}=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\psi;$$
$$x_n=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\psi,$$

其中 $0\leqslant\theta_k\leqslant\pi$, $0\leqslant\psi<2\pi$。其体积元素是

$$d\omega_n=r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\,dr\,d\theta_1\cdots d\theta_{n-2}\,d\psi。$$

去掉 dr，并令 $r=1$，可得單位球面上的表面积元素 $d\sigma_n$。取函数

$$F(M)=\varphi(M)\frac{\partial^{l-1}}{\partial r^{l-1}}\left[\frac{r^{l-1}}{(l-1)!}\sigma\left(\frac{r}{h}\right)\right]-\\-\frac{\partial\varphi(M)}{\partial r}\cdot\frac{\partial^{l-2}}{\partial r^{l-2}}\left[\frac{r^{l-1}}{(l-1)!}\sigma\left(\frac{r}{h}\right)\right]+\\+\cdots+(-1)^{l-1}\frac{\partial^{l-1}\varphi(M)}{\partial r^{l-1}}\left[\frac{r^{l-1}}{(l-1)!}\sigma\left(\frac{r}{h}\right)\right],\quad(22)$$

其中 r 是距离 $\overline{M_0M}$。直接可以証明下列公式:

$$F(M_0)=\varphi(M_0);\ 当\ r=h\ 时\ F(M)=0,\quad(22_1)$$

$$\frac{\partial F(M)}{\partial r}=\varphi(M)\frac{\partial^l}{\partial r^l}\left[\frac{r^{l-1}}{(l-1)!}\sigma\left(\frac{r}{h}\right)\right]+\\+(-1)^{l-1}\frac{\partial^l\varphi}{\partial r^l}\left[\frac{r^{l-1}}{(l-1)!}\sigma\left(\frac{r}{h}\right)\right],\quad(22_2)$$

而可以写成

$$\varphi(M_0)=-\int_0^h\frac{\partial F(M)}{\partial r}dr,$$

其中积分是依由 M_0 出發的半綫面取得的。把这公式两边乘上 $d\sigma_n=d\omega_n:r^{n-1}dr$，依限 $0\leqslant\theta_s\leqslant\pi$ 及 $0\leqslant\psi\leqslant2\pi$ 取积分，可得

$$\varphi(M_0)=-\frac{1}{\sigma_n}\int_{D_0}\frac{\partial F(M)}{\partial r}r^{-n+1}dx_1\cdots dx_n,$$

其中 D_0 是以 M_0 为中心以 h 为半徑的球，面 σ_n 是 R_n 中單位球表面面积。令 $k=\left[\frac{n}{2}\right]$，把上式改写成

$$\varphi(M_0)=-\frac{1}{\sigma_n}\int_{D_0}\frac{1}{r^k}\frac{\partial F(M)}{\partial r}r^{k-n+1}dx_1\cdots dx_n,$$

并应用舒伐尔兹不等式，可得

$$\varphi^2(M_0)\leqslant\frac{1}{\sigma_n^2}\int_{D_0}\left(\frac{1}{r^k}\frac{\partial F(M)}{\partial r}\right)^2dx_1\cdots dx_n\times$$

$$\times\int_{D_0}r^{2k-2n+2}r^{n-1}drd\theta_1\cdots d\theta_{n-2}d\psi。$$

当 n 是偶数时，上面最后积分中的冪指数等于 1，而当 n 是奇数时，这冪指数是零。如此我們得到

$$\varphi^2(M_0)\leqslant c_1\int_{D_0}\left(\frac{1}{r^k}\frac{\partial F(M)}{\partial r}\right)^2dx_1\cdots dx_n,\tag{23}$$

其中常数 c_1 只依从于 h。回到公式 (22_2)。在它的右边 φ 的系数当 $r\leqslant\frac{h}{3}$ 时等于零，这由(21)可以得知。另一方面，留意复合函数的微分法则，可以結論 $\frac{\partial^l\varphi}{\partial r^l}$ 是依 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 l 阶导函数以有界系数作的一次組合式。留意这点，可以写成：

$$\frac{1}{r^k}\frac{\partial F(M)}{\partial r}=a\varphi+\sum a_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\frac{\partial^l\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

其中 a 是有界連續函数，而 $|a_{\alpha_1\cdots\alpha_n}|\leqslant c_2r^{l-k-1}$。当 $l\geqslant k+1$ 时，就是說 $l\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 时，在上写的公式中一切系数都是有界的，而留意不等式 $(x_1+\cdots+x_n)^2\leqslant n(x_1^2+\cdots+x_n^2)$，及不等式(19)，依(23)可得

$$\varphi^2(M_0)\leqslant c^2A^2,$$

其中常数 c 只依从于 h。如果对于整正数 β，不等式 $l-\beta\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 成立，就是說 $\beta\leqslant l-\left[\frac{n}{2}\right]-1$，那末可以把 φ 换成 φ 的任意 β 阶偏导函数，l 换成 $(l-\beta)$，而应用上面的全部推理。如此可得不等式(20)，而輔助定理証明了。

回来証明上述的基本定理。令 $\varphi\in H_n^{(p)}$，如果 $p\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]+1$。

对于 φ，作具有一切阶导函数的中值函数 $\omega_k(k=1, 2, \cdots)$ 的序列。函数 ω_k 及其 p 阶以前的偏导函数依中值趋向于 φ 及其广义导函数[80]，由此可知对于任意球 D:

$$\int_D\left(\frac{\partial^\alpha \omega_l}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}-\frac{\partial^\alpha \omega_k}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)^2 dx_1\cdots dx_n\leqslant\varepsilon^2$$

$$(\alpha=0, 1, \cdots, p),$$

对于足够大的 k 及 l 成立。由此，依輔助定理，可知在半徑較小的任意球 D_1 中不等式

$$\left|\frac{\partial^\beta \omega_l}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_n^{\beta_n}}-\frac{\partial^\beta \omega_k}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_n^{\beta_n}}\right|\leqslant c\varepsilon$$

成立，就是說，如果 $r=p-\left[\frac{n}{2}\right]-1$，序列 ω_k 在 $C_n^{(r)}$ 中收斂于某函数 ω，而 ω 也屬于 $C_n^{(r)}$。另一方面，ω_k 依中值趋向于 φ，而依[57]中的定理，可以結論 ω 及 φ 相抵，就是說 φ 与 $C_n^{(r)}$ 的一函数相抵，而定理的第一結論証明了。

剩下要証明由 $H_n^{(p)}$ 中的收斂可得 $C_n^{(r)}$ 中的收斂。令 $\varphi_k^{(m)}$ $(m=1, 2, \cdots)$ 是 φ_k 的中值函数。依条件可知不等式(15)在任意球 D 中成立。依[79]中的(66)，也可以写出关于 $\varphi_l^{(m)}$ 及 $\varphi_k^{(m)}$ 的同样不等式。但这些函数有一切阶的連續导函数，而对于它我們可以应用証明了的輔助定理，由此可知对于任意預定的正数 ε，必存在一依从于 ε 及 D' 的數 N，使在位于 D 內部的任意球 D' 中，对于任意 m，当 k 及 $l\geqslant N$ 时，下面不等式滿足：

$$\left|\frac{\partial^\beta \varphi_l^{(m)}}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_n^{\beta_n}}-\frac{\partial^\beta \varphi_k^{(m)}}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_n^{\beta_n}}\right|\leqslant c\varepsilon。\tag{24}$$

另一方面，依定理的第一部分，$\varphi_k(k=1, 2, \cdots)$ 有 r 阶以前的連續导函数，而引用[80]中的定理4，可知当无限地增大 m 时任意函数 $\varphi_k^{(m)}$ 及其 r 阶以前的导函数在 D' 中一致趋向于 φ_k 及其相应各阶导函数。在不等式(24)中取 $m\to\infty$ 时的極限，可得，当 k 及 $l\geqslant N$ 时，

$$\left|\frac{\partial^{\beta}\varphi_{l}}{\partial x_{1}^{\beta_{1}}\cdots\partial x_{n}^{\beta_{n}}}-\frac{\partial^{\beta}\varphi_{k}}{\partial x_{1}^{\beta_{1}}\cdots\partial x_{n}^{\beta_{n}}}\right|\leqslant c\varepsilon,$$

而既然球 D' 是任意的，由此可知序列 φ_k 在 $C_n^{(p)}$ 中收斂，而定理完全証明了。

关于空間 $C_n^{(p)}$ 及 $H_n^{(p)}$ 間的联系的研究可参看院士 C. Л. 索伯列夫的著作 "Об одной задаче полигармонических уравнений" (見 Математич. сборник 卷 II, 3, 1937)及"論泛函分析中的一个定理"(見 Математич. сборник 卷 V, 3, 1938)。

188. 空間 $C^{(p)}$ 及其上的泛函 我們仍考察具有連續偏导函数的函数所組成的空間，以及其上的泛函，以及这些概念在数学物理中的最簡單应用。令 $C^{(p)}$ 是定义于整个 R_n 上的，連續，并有 p 阶以前的偏导函数，只在空間 R_n 中的某有穷部分 D_φ 之中异于零的实值函数的空間 $C^{(p)}$，其中对于 $C^{(p)}$ 中不同的 φ，D_φ 也是不同的。对于 $C^{(p)}$ 中的函数，用实数乘以及相加仍得出 $C^{(p)}$ 中的函数，因此 $C^{(p)}$ 是满足[92]中一切公理的矢量空間。我們定义 $C^{(p)}$ 中的收斂。我們說，$C^{(p)}$ 中的元序列 $\varphi_k(k=1, 2, \cdots)$ 收斂于 $C^{(p)}$ 中的元 φ，是指下面两条件满足：

1. 存在一个包含一切 D_{φ_k} 的有界区域。

2. 函数 φ_k 及其 p 阶以前諸导函数在整个 R_n 中一致收斂于 φ 及其相应各阶导函数；显然第二条件可以改成序列 φ_k 在 R_n 中一致地自收斂。我們将写成 $\varphi_k\Rightarrow\varphi$，或 $\lim\varphi_k=\varphi$。函数 ψ 及其 p 阶以前諸导函数($\psi\in C^{(p)}$)的絕对值中最大者表示或記号 $\|\psi\|$。它满足范数的一切公理，但由 $\|\varphi_k\|\to 0$ 不能断定 $\varphi_k\Rightarrow 0$。例如函数 $\varphi_k(P)$ 以及其諸导函數在 R_n 中收斂于零，但如果使它們不等于零的諸点所組成的区域无限地扩大，那末 $\|\varphi_k\|\to 0$，而 φ_k 做为空間 $C^{(p)}$ 中的元并不趋向于零，因为关于諸 φ_k 的極限，第一条件并不满足。因此我們将不把 $\|\varphi\|$ 叫做范数。

現在定义 $C^{(\varphi)}$ 中的綫性泛函。令对于 $C^{(\varphi)}$ 每一 φ 有一实數与它相应，我們用記号 (l, φ) 表示这实数，l 表示这相应关系。再設泛函是分配的：即

$$(l, c_1\varphi_1+\cdots+c_m\varphi_m)=c_1(l, \varphi_1)+\cdots+c_m(l, \varphi_m), \quad (25)$$

并且是連續的，即，如果 $\varphi_k\Rightarrow\varphi$，則

$$(l, \varphi_k)\to(l, \varphi)。 \quad (26)$$

如此的泛函叫做 $C^{(\varphi)}$ 中的綫性泛函。$C^{(\varphi)}$ 中的一切可能綫性泛函組成一綫性空間，我們用 $U^{(\varphi)}$ 表示。在这空間中很自然地定义乘实数及加法两种运算：

$$(cl, \varphi)=c(l, \varphi); \quad (l_1+l_2, \varphi)=(l_1, \varphi)+(l_2, \varphi), \quad (27)$$

所以 $U^{(\varphi)}$ 是一矢量空間，满足 [92] 中的一切公理。現在定义 $U^{(\varphi)}$ 中的極限概念，令 $(l_k, \varphi)(k=1, 2, \cdots)$ 是 $C^{(\varphi)}$ 中的泛函序列，而对于 $C^{(\varphi)}$ 中的任意元 φ 数列 (l_k, φ) 有有穷極限，我們表示成 (l, φ)：

$$\lim_{k\to\infty}(l_k, \varphi)=(l, \varphi)。 \quad (28)$$

可以証明 (l, φ) 是 $C^{(\varphi)}$ 中的綫性泛函。它叫做泛函 (l_k, φ) 的極限。

綫性泛函可以有积分形式：

$$(l, \varphi)=\int_{R_n} l(P)\varphi(P)dv_n, \quad (29)$$

其中 $l(P)$ 是在 R_n 中可測的函数，并在 R_n 的任意有界区域中可和；而 $dv_n=dx_1\cdots dx_n$。对于 $C^{(\varphi)}$ 中 $\varphi(P)$ 的任意选擇，积分 (29) 变成依有界区域而取的积分，因为 $\varphi(P)$ 在一切足够远的点处等于零。泛函(29)的分配性及連續性由积分的初等性質可以直接推出。如果除掉积分表現(29)之外，泛函 $l(\varphi)$ 有另一积分表現，其核是 $l_1(P)$，那末对于在 $C^{(\varphi)}$ 中 $\varphi(P)$ 的任意选擇，乘积 $[l(P)-l_1(P)]\varphi(P)$ 的积分等于零；由此可知 $l(P)$ 及 $l_1(P)$ 是相抵的。

由积分 (29) 表現的泛函可由其核 $l(P)$ 表現其特征。最重要的情形乃是当 $l(P)$ 及其諸导函数在 R_n 中連續的时候。但并非一切泛函都可以表現成(29)的积分形式。作为例，取泛函 $\delta(P_0)$，它使函数 $\varphi(P)$ 有其在 P_0 点的值 $\varphi(P_0)$ 与之相应：

$$(\delta(P_0), \varphi) = \varphi(P_0)。$$

再注意对于不同 p 值，$C^{(p)}$ 及 $U^{(p)}$ 間的关系。如果 $p_1>p$，而 $\varphi(P)\in C^{(p_1)}$，那末显然它也屬于 $C^{(p)}$，但其逆不一定成立，就是說 $C^{(p_1)}$ 比 $C^{(p)}$ 狭小。反之，$U^{(p_1)}$ 較 $U^{(p)}$ 寬广，就是說，凡屬于 $U^{(p)}$ 的綫性泛函屬于 $U^{(p_1)}$，但有屬于 $U^{(p_1)}$ 的泛函不屬于 $U^{(p)}$。事实上，如果泛函 (l, φ) 定义于 $C^{(p)}$ 中，那末旣然 $C^{(p_1)}$ 屬于 $C^{(p)}$，(l, φ) 也定义于 $C^{(p_1)}$ 中，并且在 $C^{(p_1)}$ 中也是分配且連續的，因为 $C^{(p_1)}$ 中的收斂必然蘊涵 $C^{(p)}$ 中的收斂，而在后者之中 (l, φ) 是連續的。如果考察一泛函，它使 $C^{(p_1)}$ 中每一函数与其某一 p_1 阶导函数在 P_0 点的值相应，那末这泛函并不对于 $C^{(p)}$ 中一切函数有定义，如此，并不是 $C^{(p_1)}$ 中的綫性泛函。

189. $C^{(p)}$ 及 $U^{(p)}$ 中的运算子 現在定义 $C^{(p)}$ 中的綫性运算子。令 $C^{(p)}$ 中每个元 φ 与 $C^{(q)}$ 中某一元 $A\varphi$ 相应，并且这对应是在 $C^{(p)}$ 中分配的且連續的，就是說如果在 $C^{(p)}$ 中 $\varphi_k\to\varphi$，那末 $A\varphi_k\to A\varphi$ 在 $C^{(q)}$ 中成立。这时 A 叫做由 $C^{(p)}$ 到 $C^{(q)}$ 中的綫性运算子。如此的运算子显然可以看成由 $C^{(p)}$ 到任意 $C^{(q_1)}$ 中的运算子，其中 $q_1<q$。同样可以定义由 $U^{(p)}$ 到 $U^{(q)}$ 中的綫性运算子 B。凡 $U^{(p)}$ 中的元 l 与 $U^{(q)}$ 中的某元 Bl 相应，而这对应是在 $U^{(p)}$ 中分配的，并且如果在 $U^{(p)}$ 中 $\lim l_k=l$，那末 $\lim Bl_k=Bl$ 在 $U^{(q)}$ 中成立。这时 B 可以看做由 $U^{(p)}$ 到任意 $U^{(q_1)}$ 中的运算子，其中 $q_1>q$。

現在定义与上述运算子共軛的运算子 A^*，其方式与以前关于賦范空間所論者完全一样。令 m 是 $U^{(q)}$ 的某一元。对于 $C^{(p)}$ 中的任意元 φ，可以应用 m 于 $A\varphi$ 上，而得数 $(m, A\varphi)$。这最后一

式可以看做在 $C^{(p)}$ 中的綫性泛函。其分配性可以直接由 A 及 m 的分配性得出。另一方面，如果在 $C^{(p)}$ 中 $\varphi_k \Rightarrow \varphi$，那末在 $C^{(q)}$ 中 $A\varphi_k \Rightarrow A\varphi$，因此 $(m, A\varphi_k) \to (m, A\varphi)$。式 $(m, A\varphi)$ 做为 $C^{(p)}$ 中的泛函表示成 (l, φ)，其中 l 是 $U^{(p)}$ 中的元，就是說

$$(m, A\varphi) = (l, \varphi) \tag{30}$$

$$(\varphi \in C^{(p)},\ A\varphi \in C^{(q)},\ m \in U^{(q)},\ l \in U^{(p)})。$$

如此对于 $U^{(q)}$ 中的任意元 m 有 $U^{(p)}$ 中的某元 l 与它相应，我們把它表示成

$$l = A^* m。$$

这对应的分配性直接由 (27) 及 (30) 可以得出。現在証明其連續性。

令在 $U^{(q)}$ 中 $m_k \to m$，而 $A^* m_k = l_k$。应当証明在 $U^{(p)}$ 中 $l_k \to l$，其中 $l = A^* m$。写出公式(30)：$(m_k, A\varphi) = (l_k, \varphi)$。对于任意 φ，左边趋向于 $(m, A\varphi)$，由此可知 l_k 在 $U^{(p)}$ 中有極限，我們用 l 表示它。取公式 $(m_k, A\varphi) = (l_k, \varphi)$ 的極限，可得 $(m, A\varphi) = (l, \varphi)$，由此可知 $l = A^* m$。如此 A^* 是由 $U^{(q)}$ 到 $U^{(p)}$ 中的綫性泛函，而公式(30)可以写成形式

$$(m, A\varphi) = (A^* m, \varphi) \tag{31}$$

$$(\varphi \in C^{(p)},\ A\varphi \in C^{(q)},\ m \in U^{(q)},\ A^* m \in U^{(p)})。$$

如果把 A 看成由 $C^{(p)}$ 到 $C^{(q_1)}$ 中的运算子，而 $q_1 < q$，那末 A^* 是由 $U^{(q_1)}$ 到 $U^{(p)}$ 中的运算子。考察两个重要运算子，乘以函数的运算子及取导函数的运算子。令 $\omega(P)$ 是与其 r 阶以前的一切偏导函数都在 R_n 中連續的函数。公式

$$L\varphi = \omega(P)\varphi(P)。 \tag{32}$$

决定一由 $C^{(p)}$ 到 $C^{(q)}$ 中的綫性运算子，其中 q 是 p 及 r 两数中的較小者：$q = \min(p, r)$。共軛运算子 L^* 是由 $U^{(q)}$ 到 $U^{(p)}$ 中的綫性运算子。必須設 $\omega(P)$ 是預定的，数 r 也是預定的。現在将設

数 $q\leqslant r$ 也是預定的。这时最好取尽可能小的 p 值，就是說 $p=q$。如果 $U^{(q)}$ 中的元 m 由积分决定，就是說由公式(29)决定，那末

$$(L^*m,\ \varphi)=(m,\ L\varphi)=\int_{R_n}m(P)\omega(P)\varphi(P)dv_n,$$

就是說，运算子 L^*m 与把泛函 m 的核乘 $\omega(P)$ 同效。对于泛函 m 的一般情形我們說由 $U^{(q)}$ 到 $U^{(q)}$ 中的运算子 L^* 就是乘 $\omega(P)$ 的运算子，其中 $q\leqslant r$。如此定义了把泛函乘以函数的运算子。現在定义泛函的取导函数运算子。在 $C^{(p)}(p\geqslant 1)$ 中考察运算子

$$M\varphi=-\frac{\partial\varphi}{\partial x_s}。\tag{33}$$

这是由 $C^{(p)}$ 到 $C^{(p-1)}$ 中的綫性运算子。其共軛运算子 M^* 是由 $U^{(p-1)}$ 到 $U^{(p)}$ 的綫性运算子。如果泛函 m 表示成具有連續可微分的核的积分形式，那末留意公式(29)可以写成

$$(M^*m,\ \varphi)=(m,\ M\varphi)=-\int_{R_n}m(P)\frac{\partial\varphi}{\partial x_s}dv_n=$$
$$=\int_{R_n}\frac{\partial m(P)}{\partial x_s}\varphi(P)dv_n;\tag{33$_1$}$$

我們看出，M^*m 与依 x_s 取泛函 m 的核的导函数同效。对于泛函 m 的一般情形，运算子 M^* 叫做依 x_s 取泛函 m 的导函数的运算子。

如果 A_1 及 A_2 是由 $C^{(p)}$ 到 $C^{(q)}$ 中的两个运算子，那末可以定义它們的和如下：

$$(A_1+A_2)\varphi=A_1\varphi+A_2\varphi。\tag{34}$$

这仍是由 $C^{(p)}$ 到 $C^{(q)}$ 中的綫性运算子。显然可以定义用实数乘运算子如下：$(aA)\varphi=a(A\varphi)$。同样可以定义在泛函空間中运算子之和。由定义(31)直接可知 $(A_1+A_2)^*=A_1^*+A_2^*$。依平常方式可以定义运算子的乘法。如果綫性运算子 A_1 由 $C^{(p)}$ 变到 $C^{(q)}$ 中，而 A_2 由 $C^{(q)}$ 到 $C^{(r)}$ 中，那末 A_2A_1 由 $C^{(p)}$ 变到 $C^{(r)}$ 中，并且也是綫性运算子。同样可以在泛函的空間中定义运算子的积，就是說依

(31)：$(A_2A_1)^*=A_1^*A_2^*$。运算子的积可能依从于因子的次序。

注意与泛函的积分表现式联系着的一种情形。如果 (l,φ) 是 $C^{(\varphi)}$ 中的任意泛函，那末可以作在 $C^{(\varphi)}$ 中的泛函序列 (l_k,φ)，这些泛函都表现成积分形式，并收敛于 (l,φ)。这时，(l_k,φ) 的核可以如下地作出。令 $\psi_k(P,P_0)$ 是依[79]中公式(62)作的平均核序列。如果把 $\psi_k(P,P_0)$ 看成 P_0 的函数，而应用泛函 l 于这函数上，那末其結果可得 P 的函数，$l_k(P)=(l,\psi_k)$。这些函数 $l_k(P)$ 可以取做泛函 l_k 的核。这些核有一切阶的平常連續偏导函数。对于 l_k 取导函数的运算可以定义做取核的导函數，然后依連續性可以把这运算扩展到泛函 l 上去。同样可以处理乘以函数 $\omega(P)$ 的运算子。

举几个簡單的例。应用乘以函數 $\omega(P)$ 的运算子 L 及取导函数运算子 M 的定义于泛函 $m=\delta(P_0)$ 上去，直接可得

$$[(L^*\delta(P_0)]\varphi(P)=\omega(P_0)\varphi(P_0),$$

$$[M^*\delta(P_0)]\varphi(P)=-\frac{\partial\varphi(P)}{\partial x_s}\bigg|_{P=P_0}$$

令 r 是在三維空間中由变点 P 到定点 P_0 的距离。对于在区域 D 中連續且有二阶以前各导函数的函数 $\varphi(P)$，有格林公式成立：

$$\varphi(P_0)=\frac{1}{4\pi}\int_S\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)dS-\frac{1}{4\pi}\int_D\frac{\Delta\varphi}{r}dv,$$

其中 S 是区域的面积，而在重积分中积分号只写了一次。留意 $\varphi(P)$ 在一切足够远的点处等于零，可以写成

$$\int_{E_3}\left(-\frac{1}{4\pi r}\right)\Delta\varphi(P)dv_3=\varphi(P_0), \tag{35}$$

由此依公式(33_1)可以看出具有核$(-1:4\pi r)$的泛函 m_0 满足非齐次拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 m_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 m_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 m_0}{\partial z^2}=\delta(P_0)。$$

应用公式(35)于φ依x的偏导函数上去，可得

$$\left(m_0, \frac{\partial \Delta\varphi(P)}{\partial x}\right) = -\frac{\partial \delta(P_0)}{\partial x}\varphi(P),$$

由此可見泛函m_0依x的偏导函数满足非齐次方程

$$\Delta m_0 = \frac{\partial \delta(P_0)}{\partial x}。$$

如此可以考察泛函的橢圓型方程，并对于它們提出种种問題。特別是可以証明在无界空間中凡拉普拉斯方程$\Delta m = 0$的解必是积分形式的泛函，其核是平常的調和函数。这些观念也可以应用于双曲綫型方程。但因有实特征曲綫存在，这里空間$C^{(p)}$的作法有些不同。上述关于双曲綫型偏微分方程的問題曾由院士 C. Л. 索伯列夫在其著作“关于綫性双曲綫型方程的柯西問題”(数学彙刊，1,1，1936)中提出。

190. 泛函序列 本节目的在于証明下面定理，卽如果一泛函序列对于每个元收斂，那末極限泛函不仅分配，而且是連續的。在[188]中关于$C^{(p)}$曾提及过这一点。現在就一般型的空間証明这定理，于是可得[188]的結論做为系。首先应当証明些輔助命題。将考察一抽象的完备賦范空間B，如在[183]中所定义的。在其中極限概念由范数概念得出，卽如$\|x-x_n\|\to 0$时$x_n\to x$。在空間B中所謂具有中心x_0及半徑r(正数)的球是指凡滿足条件$\|x-x_0\|\leqslant r$的元x的集合。B中元集合$\mathscr{E}$叫做閉的，是指$\mathscr{E}$中收斂元序列的極限元仍屬于$\mathscr{E}$。

輔助定理 1. 如果有一无穷序列的球$C_n(n=1, 2, \cdots)$，其半徑各是r_n，$r_n\to 0$，并且凡球C_{n+1}含于C_n中，那末存在一个共屬于一切球C_n的元。

令x_n是球C_n的中心。依輔助定理的条件，当$p<q$时，凡屬于球C_q的元x_q也必屬于C_p，就是說$\|x_q-x_p\|\leqslant r_p$。旣然当无穷增

大 p 时 $r_p \to 0$，那末由此可知元序列 x_n 自收敛，而既然空間 B 是完备的，存在一元 x_0，使 $x_n \Rightarrow x_0$。由范数的性質 [183] 可知 $\|x_p - x_0\| \leqslant \|x_p - x_q\| + \|x_q - x_0\|$，而由于 $\|x_p - x_q\| \leqslant r_p$，可得 $\|x_p - x_0\| \leqslant r_p + \|x_q - x_0\|$。当无穷增大 q 时这不等式右边趋向于 r_p，而左边不依从于 q，于是取極限可知对于任意选擇的 p，$\|x_p - x_0\| \leqslant r_p$，由此可知 x_0 屬于一切球 C_p。

輔助定理 2. 如果 B 表現成 B 中元的閉集合 D_n 的和：

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} D_n, \tag{36}$$

那末至少有一个集合 D_n 包含 B 中某一球的一切元。

用归謬法証明。令一切 D_n 都不能含 B 中的球。由此可知存在一元 x_1 不屬于 D_1，而因为 D_1 是閉的，存在一小正数 r_1，使由不等式 $\|x - x_1\| \leqslant r_1$ 所定的球 C_1 与 D_1 无公共元。当然，在任何情形下可以設 $r_1 < 1$。依所設，在球

$$\|x - x_1\| \leqslant \frac{1}{2} r_1$$

中有一元 x_2 不屬于 D_2。既然 D_2 是閉的，以 x_2 为中心以足够小的数 r_2 为半徑的球与 D_2 无公共点。这时我們可以設 $r_2 \leqslant \frac{1}{2} r_1$，而因此 $r_2 < \frac{1}{2}$。这时由不等式 $\|x - x_2\| \leqslant r_2$ 定义的球 C_2 屬于球 C_1，因为 $\|x - x_1\| \leqslant \|x - x_2\| + \|x_2 - x_1\| \leqslant r_2 + \frac{1}{2} r_1$。如此球 C_2 与 D_1 及 D_2 均无公共元。依所設，有球 $\|x - x_2\| \leqslant \frac{1}{2} r_2$ 中的一元 x_3 不屬于 D_3。与以前一样，可以作球 C_3：$\|x - x_3\| \leqslant r_3$，这球屬于 C_2，并与 D_3 无公共元，并可設 $r_3 < \frac{1}{4}$，等等。如此可得依次相含的球序列 $C_n (C_{n+1} \subset C_n)$，其中 $r_n \to 0$ 而球 C_n 与 D_n 无公共元。依輔助定理 1，有一元 x_0 屬于一切球 C_n。依上面所述，这元 x_0 不屬于任何集合 D_n，这与(36)相冲突，于是輔助定理証明了。

綫性泛函 (l, x) 永远算做对于 B 中一切元有定义，而它必须满足分配性及連續性条件；即

$$(l, a_1x_1+a_2x_2)=a_1(l, x_1)+a_2(l, x_2),$$

而如果 $x_k\Rightarrow x$，那末 $(l, x_k)\to(l, x)$。如果 (l_n, x) 是收斂的泛函序列，就是說对于任意元 x 当无限增大 n 时存在有穷極限 (l_n, x)，那末用記号 (l, x) 表示这極限数，可得一定义于整个 B 上的泛函。它的分配性直接由 (l_n, x) 的分配性及取極限得出。我們将証明 (l,x) 的連續性。依其分配性，其連續性就是当 $x-x_k\Rightarrow0$ 时 $(l, x-x_k)\to0$，就是說只須証明如果 $x_k\Rightarrow0$，那末 $(l, x_k)\to0$。我們証明，只須驗明如果 $x_k\Rightarrow0$；那末数列 (l, x_k) 有界。事实上，設这一条件滿足，我們証明 $(l, x_k)\to0$。如果 x_k 是零元，那末 $(l, x_k)=0$，所以凡零元可以由序列中除掉。如此可設沒有一个 x_k 是零元。取正数 $b_k=1:\sqrt{\|x_k\|}$。既然 $x_k\Rightarrow0$，則 $b_k\to\infty$。又 $\|b_kx_k\|=\sqrt{\|x_k\|}\to0$，就是說 $b_kx_k\Rightarrow0$。留意所設的有界性，可以結論：存在正数 a，使 $|(l, b_kx_k)|\leqslant a$，就是說 $|(l, x_k)|\leqslant\frac{a}{b_k}$，由此可知 $(l, x_k)\to0$。因此極限泛函連續性的証明归結成下面輔助定理的証明。

輔助定理 3. 对于滿足 $x_k\Rightarrow0$ 的任意元序列 x_k，存在一正数 a，滿足条件 $|(l, x_k)|\leqslant a\ (k=1, 2, \cdots)$。

用 D_s 表示凡对于任意 n 滿足不等式

$$|(l_n, x)|\leqslant s \tag{37}$$

的元 x 所組成的集合，其中 s 是一固定的正数。对于凡确定的元 x'，数列 (l_n, x') 依条件有有穷極限，因此存在一正数 d，使对于任意 n，$|(l_n, x')|\leqslant d$。由此可知元 x' 屬于某一 D_s，就是說

$$B=\sum_{s=1}^{\infty}D_s。 \tag{38}$$

我們証明每个 D_s 是閉的，就是說証明如果 $y_k\Rightarrow y$，而 $|(l_n, y_k)|\leqslant s$ 对于凡 n 及 k 成立，那末 $|(l_n,y)|\leqslant s$ 对于凡 n 也成立。相反地，令

存在一值 $n=n_0$，使 $|(l_{n_0}, y)|>s$。因为泛函 l_{n_0} 是連續的，一定对于凡足够大的 k 有 $|(l_{n_0}, y_k)|>s$，这与所設不符了。于是(38)成立，而一切集合 D_s 是閉的。可以断定，依輔助定理 2，在諸 D_s 之中，存在一 D_{s_0}，包含某一球 $\|x-x_0\|\leqslant r_0$，就是說，如果 $\|x-x_0\|\leqslant r_0$，那末，

$$|(l_n, x)|\leqslant s_0 \quad (n=1, 2, \cdots)。 \tag{39}$$

回到輔助定理 3 中的序列 x_k。可以写成 $x_k=(x_k+x_0)-x_0$，而依 $x_k\Rightarrow 0$，对于一切足够大的 k 值，元 $y_k=x_k+x_0$ 滿足条件 $\|y_k-x_0\|\leqslant \leqslant r_0$，由此，依(39)，可知 $|(l_n, x_k+x_0)|\leqslant s_0$ 对于一切 n 及足够大的 k 成立。另一方面，$(l_n, x_k)=(l_n, x_k+x_0)-(l_n, x_0)$，所以

$$|(l_n, x_k)|\leqslant s_0+|(l_n, x_0)| \quad (n=1, 2, \cdots)$$

对于足够大的 k 成立。上面曾看到，对于任意固定元 x'，序列 $|(l_n, x')|$ 是有界的，由此直接可知上面不等式的右边有界，而既然对有有穷多个最前的 k 值，$|(l_n, x_k)|$ 有界，可知不等式左边有界。如此輔助定理 3 証明了。依上述可得下面定理。

定理 如果对于 B 中的任意元 x，綫性泛函 (l_n, x) 序列有有穷極限：$(l_n, x)\to(l, x)$，那末 (l, x) 也是綫性泛函。

回到 [188] 中关于 $C^{(p)}$ 中泛函的結論。与以前一样，只須証明当 $\varphi_k\Rightarrow 0$ 时序列 $|(l_n, \varphi_k)|$ 有界。由 $C^{(p)}$ 中收斂的定义可知在空間 R_n 中的某一有穷区域 D 之外一切 φ_k 等于零。令 B 表示 $C^{(p)}$ 中凡在上述区域 D 之外等于零的函数所成的集合。这是綫性空間，(用实数乘其中的元)并滿足 [92] 中一切公理。在 B 中的范数与在 $C^{(p)}$ 中一样地定义，而收斂是設为由范数产生的，就是說如果 $\|\varphi-\varphi_n\|\to 0$，則 $\varphi_n\Rightarrow\varphi$。范数显然滿足 [183] 的三个条件。在 $C^{(p)}$ 中的綫性泛函 l_n 也是 B 中的綫性泛函。应用上面証明了的輔助定理 3，可知序列 $|(l_n, \varphi_k)|$ 有界，因为一切 φ_k 在 D 之外等于零，而 $\|\varphi_k\|\to 0$。

注 回到一般空間 B 中的泛函。在綫性泛函 (l, x) 的定义中曾举出其分配性及連續性。取有界泛函的概念 [比較 97]。定义于整个 B 上的泛函 (l, x) 叫做有界的，是指存在正数 m，使 $|(l,x)| \leqslant m\|x\|$。容易看出，由分配性及有界性可得泛函的連續性。因为

$$|(l, x)-(l, x_k)|=|(l, x-x_k)| \leqslant m\|x-x_k\|,$$

而如果 $x_k \Rightarrow x$，就是說 $\|x-x_k\| \to 0$，那末由上面不等式直接可知 $(l, x_k) \to (l, x)$。現在証明由分配性及連續性可知泛函的有界性。我們用归謬法証明。設泛函 (l, x) 分配，連續，而不是有界的，那末由此可知存在元序列 x_k，使

$$|(l, x_k)|:\|x_k\|=m_k \to +\infty。 \tag{40}$$

取元 $y_k=\dfrac{1}{m_k\|x_k\|}x_k$，那末 $\|y_k\|=\dfrac{1}{m_k} \to 0$，就是說 $y_k \Rightarrow 0$，而由于泛函的連續性，應当有 $(l, y_k) \to 0$。另一方面，由泛函的分配性，依(40)可知

$$|(l, y_k)|=\left|\left(l, \frac{1}{m_k\|x_k\|}x_k\right)\right|=\frac{1}{m_k\|x_k\|}|(l, x_k)|=1,$$

于是得出矛盾。如此綫性泛函可以定义成定义于整个 B 上的分配有界泛函。

191. 在 L_p 中的列緊性 考察定义于軸 $-\infty<x<+\infty$ 的某一有穷区間 $[a, b]$ 上的函数 $\varphi(x)$ 的空間 L_p。

定义 L_p 中函数所組成的集合 A 叫做列緊的，是指由屬于 A 的任意函数序列 $\varphi_k(x)$，可以取出一收斂于 L_p 中一極限元的部分序列，而这里收斂是指在 L_p 中的收斂[63]。

以前曾論过在連續函数空間 C 中的列緊性[14]。現在我們証明与 [14] 中基本定理完全相似的定理。只是在 C 中等于函数絕对值的極大值的范数須改变成 L_p 中的范数，而这里与以往一样設 $p \geqslant 1$。在下面，一切函数 $\varphi(x)$ 都定义于整个軸 $-\infty<x<+\infty$ 上，但設这些函数在 $[a, b]$ 之外等于零。如此在下面諸公式中凡积分

都可以扩展到整个軸上。

定理 如果 L_p 中某集合 A 中的一切函数 $\varphi(x)$ 的范数为同一数 L 所界，就是說

$$\|\varphi\|=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant L, \tag{41}$$

而对于任意預定的正数 ε，必存在一数 η，使对于 A 中一切函数 $\varphi(x)$：当 $|h|\leqslant\eta$ 时

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x+h)-\varphi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\varepsilon, \tag{42}$$

那末集合 A 是在 L_p 中列紧的。

首先注意，由于上述对于 L_p 中函数 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 以外的扩展，函数 $\varphi(x)$ 及 $\varphi(x+h)$ 都是屬于整个軸上的 L_p 的，因此出現于公式(42)中的积分对于 L_p 中 $\varphi(x)$ 的任意选擇都是有有穷值的。如果，比方說，h 是正数，那末其积分号下的函数在区間 $[a-h, b]$ 之外等于零。首先証明一个輔助定理。

輔助定理 为了 L_p 中的元集合 A 是列緊的，必須且只須下面条件成立：对于任意預定的正数 ε，必存在 L_p 中一列緊集合 B_ε，使对于 A 中每个元 φ，必有 B_ε 中一个元 ψ 存在，使 $\|\varphi-\psi\|\leqslant\varepsilon$。

必要性是显然的，因为如果 A 是列緊的，那末可以取 A 自己做为 B_ε，而且結論中的 ψ 就可以取成 φ 自己。我們將証明充分性，就是說，設对于任意 ε，輔助定理中所說的集合 B_ε 存在，并証明由 A 中任意元序列

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots \tag{43}$$

可以选出一个在 L_p 中收斂的部分序列来。取某一正数 a。依輔助定理的条件，存在 $B_{\frac{a}{3}}$ 中的元序列，$\psi_1, \psi_2, \cdots$，使 $\|\varphi_n-\psi_n\|\leqslant\frac{a}{3}$ $(n=1, 2, \cdots)$。既然 $B_{\frac{a}{3}}$ 是列緊的，由序列 ψ_n 可以选出一个在 L_p 中收斂的部分序列 $\psi_{n_1^{(1)}}, \psi_{n_2^{(1)}}, \cdots$。这时必存在一数 N_1，使当 q 及

$r \geqslant N_1$ 时，

$$\|\psi_{n_q^{(1)}} - \psi_{n_r^{(1)}}\| \leqslant \frac{a}{3},$$

这时，由于范数的性質，可得

当 r 及 $q \geqslant N_1$ 时

$$\|\varphi_{n_q^{(1)}} - \varphi_{n_r^{(1)}}\| \leqslant \|\varphi_{n_q^{(1)}} - \psi_{n_q^{(1)}}\| + \|\psi_{n_q^{(1)}} - \psi_{n_r^{(1)}}\| + \|\psi_{n_r^{(1)}} - \varphi_{n_r^{(1)}}\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{a}{3} = a,$$

就是說，当 q 及 $r \geqslant N_1$ 时

$$\|\varphi_{n_q^{(1)}} - \varphi_{n_r^{(1)}}\| \leqslant a。$$

同样，把 a 换成 $\frac{a}{2}$，可以由序列 $\varphi_{n_1^{(1)}}$，$\varphi_{n_2^{(1)}}$，…中取出一无穷部分序列 $\varphi_{n_1^{(2)}}$，$\varphi_{n_2^{(2)}}$，…来，使当 q 及 $r \geqslant N_2$ 时，

$$\|\varphi_{n_q^{(2)}} - \varphi_{n_r^{(2)}}\| \leqslant \frac{a}{2},$$

其中 N_2 是某一新的正数。把 a 换成 $\frac{a}{3}$，由序列 $\varphi_{n_1^{(2)}}$，$\varphi_{n_2^{(2)}}$，…可以取出一无穷部分序列 $\varphi_{n_1^{(3)}}$，$\varphi_{n_2^{(3)}}$，…来，使当 q 及 $r \geqslant N_3$ 时

$$\|\varphi_{n_q^{(3)}} - \varphi_{n_r^{(3)}}\| \leqslant \frac{a}{3},$$

余类推。現在取序列

$$\varphi_{n_1^{(1)}}, \varphi_{n_2^{(2)}}, \varphi_{n_3^{(3)}}, \cdots, \tag{44}$$

这显然也是(43)的一个部分序列，我們証明(44)是在 L_p 中收斂的序列。令 ε 是任意預定的正数。取正整数 k，使 $\frac{a}{k} \leqslant \varepsilon$。序列(44)中从 $\varphi_{n_k^{(k)}}$ 項起的一切元都出現于序列 $\varphi_{n_1^{(k)}}$，$\varphi_{n_2^{(k)}}$，…中，因此可知 $\|\varphi_{n_q^{(q)}} - \varphi_{n_r^{(r)}}\| \leqslant \frac{a}{k} \leqslant \varepsilon$ 只要 q 及 r 足够大就一定成立，而既然 ε 是任意的，可知序列(44)在 L_p 中自收斂，因此必收斂于 L_p 中某

一元[63]，而輔助定理証明了。

現在証明定理。对于凡定义于整个軸 $-\infty<x<+\infty$ 上幷依任意有穷区間可积分的函数 $\varphi(x)$，可以作函数

$$\varphi_\delta(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta}\varphi(t)dt, \tag{45}$$

其中 δ 的固定的正数。如果 $\varphi(x)$ 屬于 $[a, b]$ 上的 L_p，幷以零扩展它，那末 $\varphi_\delta(x)$ 在区間 $[a-\delta, b+\delta]$ 之外等于零。把 $\varphi(t)$ 表成乘积的形式：$\varphi(t)=1\cdot\varphi(t)$，幷应用赫勒德尔不等式，可得

$$|\varphi_\delta(x)|\leqslant\left[\frac{1}{2\delta}\int_{y-\delta}^{x+\delta}|\varphi(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{1}{(2\delta)^{\frac{1}{p}}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}。 \tag{46}$$

如果 $\varphi(x)\in A$，那末依(41)，可得

$$|\varphi_\delta(x)|\leqslant\frac{1}{(2\delta)^{\frac{1}{p}}}L,$$

就是說由集合 A 借助公式(45)而得的諸函数 $\varphi_\delta(x)$ 組成一个一致有界的函数集合。

在(46)中把 $\varphi(t)$ 換成 $\varphi(t+h)-\varphi(t)$。依公式(45)計算 $\varphi(t+h)-\varphi(t)$ 的中值函数：

$$\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta}[\varphi(t+h)-\varphi(t)]dt=\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x-\delta}\varphi(t+h)dt-\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta}\varphi(t)dt。$$

在第一积分中作变数代換 $t+h=z$，可得

$$\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta}[\varphi(t+h)-\varphi(t)]dt=\frac{1}{2\delta}\int_{x+h-\delta}^{x+h+\delta}\varphi(z)dz-\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta}\varphi(t)dt=$$

$$=\varphi_\delta(x+h)-\varphi_\delta(x),$$

而由不等式(46)可得

$$|\varphi_\delta(x+h)-\varphi_\delta(x)|\leqslant\frac{1}{(2\delta)^{\frac{1}{p}}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t+h)-\varphi(t)|^p\right]^{\frac{1}{p}}。 \tag{47}$$

由(42)可知对于任意預定的正数 ε 必存在一正数 η，使对于 A 中一切函数 $\varphi(x)$，当 $|h|\leqslant\eta$ 时不等式(47)右边第二因子不大于

$(2\delta)^{\frac{1}{p}}\varepsilon$，就是說，当 $|h|\leqslant\eta$ 时

$$|\varphi_\delta(x+h)-\varphi_\delta(x)|\leqslant\varepsilon。$$

如此由 4 中函数 $\varphi(x)$ 依公式 (45) 所得的函数集合 $\varphi_\delta(x)$ 是在 $[a-\delta, b+\delta]$ 中一致有界并且等度連續的函数集合。依[14]中的基本定理，这連續函数的集合依一致收斂的意义下在$[a-\delta, b+\delta]$上是列紧的，因而更在 $[a-\delta, b+\delta]$ 上的 L_p 中依 L_p 中的收斂意义是列紧的。但如此它依整个軸上的 L_p 中的收斂意义也是列紧的，因为一切函数 $\varphi_\delta(x)$ 在 $[a-\delta, b+\delta]$ 之外等于零。

現在在(46)中把 $\varphi(t)$ 换成 $\varphi(x)-\varphi(t)$，其中 x 是 (46) 左边的固定数。依(45)計算 $\varphi(x)-\varphi(t)$ 的中值函数：

$$\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta}|\varphi(x)-\varphi(t)|dt=\varphi(x)-\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta}\varphi(t)dt=\varphi(x)-\varphi_\delta(x)。$$

由不等式(46)可知

$$|\varphi(x)-\varphi_\delta(x)|\leqslant\left[\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta}|\varphi(x)-\varphi(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}。$$

取两边的 p 次冪，并把 t 改换成新变数 $z=t-x$，可得：

$$|\varphi(x)-\varphi_\delta(x)|^p\leqslant\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{+\delta}|\varphi(x)-\varphi(x+z)|^p dz。\qquad(48)$$

正数 δ 可以是任意的。現在固定它。令 ε 是預定的正数。依条件(42)，可以固定 δ，使 $|z|\leqslant\delta$ 时有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)-\varphi(x+z)|^p dx\leqslant\varepsilon^p。\qquad(49)$$

留意(48)左边及式 $|\varphi(x)-\varphi(x+z)|^p$ 当 $|z|\leqslant\delta$ 时在$[a-\delta, b+\delta]$之外等于零。依这区間取(48)两边的积分，这与在整个軸上积分一样。可以交換右边的积分次序，因为在交換之后仍得有穷积分值[70]：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)-\varphi_\delta(x)|^p dx\leqslant\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{+\delta}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)-\varphi(x+z)|^p dx\right]dz,$$

而依(49)，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)-\varphi_\delta(x)|^p dx \leqslant \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{+\delta}\varepsilon^p dz=\varepsilon^p,$$

就是說，$\|\varphi-\varphi_\delta\|\leqslant\varepsilon$，这范数是在全軸上的 L_p 而取的。如此，如果取全軸上的 L_p，而取 A 为上述在 $[a, b]$ 外等于零并满足条件(41)及(42)的函数 $\varphi(x)$ 的集合，B_ε 为諸函数 $\varphi_\delta(x)$ 的集合，其中 δ 依(49)决定，那末上面輔助定理中的一切条件都满足，所以集合 A 依全軸上的 L_p 中的收斂意义是列紧的，就是說依在$[a, b]$上的 L_p 中的收斂性是列紧的，因为 A 中一切函数在 $[a, b]$ 之外等于零，而定理証明了。

注 1. 定理的陈述及証明都不难改变以适应于多維的情形。考察平面上的区間：$a\leqslant x\leqslant b$，$c\leqslant y\leqslant d$，以及这区間上的空間 L_p。扩展这一切函数，使它們在上述区間之外等于零。列紧性的条件(41)及(42)改写成下面形式：

$$\iint_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x, y)|^p dxdy\leqslant L,$$

当 $|h_1|$ 及 $|h_2|\leqslant\eta$ 时

$$\iint_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x+h_1, y+h_2)-\varphi(x, y)|^p dxdy\leqslant\varepsilon。$$

在作中值函数时应当依以点 (x, y) 为心以 δ 为半徑的球取积分：

$$\varphi_\delta(x, y)=\frac{1}{\pi\delta^2}\iint_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\leqslant\delta^2}\varphi(\xi, \eta)d\xi d\eta。$$

定理显然适用于任意可測有界集合 $\mathscr{E}$ 上的空間 L_p。只須把 $\mathscr{E}$ 包括在某一有穷区間中，并以零扩展一切函数于 $\mathscr{E}$ 之外。

注 2. 現在考察在整个軸 $-\infty<x<+\infty$ 上的族 L_p，并設屬于集合 A 的一切函数 $\varphi(x)$ 除掉条件(41)及(42)之外还满足下面条件：对于任意預定的正数 ε，存在一正数 N，使对于 A 中的一切 $\varphi(x)$，当 $a\geqslant N$ 时

$$\int_a^{\infty}|\varphi(x)|^p dx\leqslant\varepsilon,\quad \int_{-\infty}^{-a}|\varphi(x)|^p dx\leqslant\varepsilon。\tag{50}$$

我們証明这时集合 A 在整个軸上的 L_p 中是列緊的。如果把无穷的积分区間換成某一有穷区間，条件(41)及(42)更能成立，而集合 A 在任意有穷区間上的 L_p 也是列緊的。取 A 中某序列

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots。\tag{51}$$

依上面所述，可以由它取出一个部分序列 $\varphi_{n_1^{(1)}}(x),\varphi_{n_2^{(1)}}(x),\cdots$来，这部分序列在区間$[-1, +1]$上的 L_p 中收斂。由这部分序列可以选出一部分序列 $\varphi_{n_1^{(2)}}(x),\varphi_{n_2^{(2)}}(x),\cdots$来，使它在区間$[-2, +2]$上的 L_p 中收斂，余类推。作序列

$$\varphi_{n_1^{(1)}}(x),\varphi_{n_2^{(2)}}(x),\varphi_{n_3^{(3)}}(x),\cdots,\tag{52}$$

这也是最初序列(51)的部分序列。如果 k 是任意正整数，那末序列(52)中从第 k 項起一切項都屬于序列 $\varphi_{n_1^{(k)}}(x),\varphi_{n_2^{(k)}}(x),\cdots$，而后者在区間$[-k, +k]$上的空間 L_p 中收斂，就是說序列(52)在任意有穷区間$[-k, +k]$上的 L_p 中收斂。考察积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi_{n_q^{(q)}}(x)-\varphi_{n_r^{(r)}}(x)|^p dx=\int_{-m}^{+m}|\varphi_{n_q^{(q)}}(x)-\varphi_{n_r^{(r)}}(x)|^p dx+$$
$$+\int_m^{\infty}|\varphi_{n_q^{(q)}}(x)-\varphi_{n_r^{(r)}}(x)|^p dx+\int_{-\infty}^{-m}|\varphi_{n_q^{(q)}}(x)-\varphi_{n_r^{(r)}}(x)|^p dx。$$

留意显然的不等式 $|x+y|^p\leqslant 2^p|x|^p+2^p|y|^p$，可以写成

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi_{n_q^{(q)}}(x)-\varphi_{n_r^{(r)}}(x)|^p dx\leqslant\int_{-m}^{+m}|\varphi_{n_q^{(q)}}(x)-\varphi_{n_r^{(r)}}(x)|^p dx+$$
$$+2^p\int_m^{\infty}|\varphi_{n_q^{(q)}}(x)|^p dx+2^p\int_{-\infty}^{-m}|\varphi_{n_q^{(q)}}(x)|^p dx+$$
$$+2^p\int_m^{\infty}|\varphi_{n_r^{(r)}}(x)|^p dx+2^p\int_{-\infty}^{-m}|\varphi_{n_r^{(r)}}(x)|^p dx。$$

依(50)对于任意預定的正数 ε 可以固定足够大的 m，使右边和中除第一項以外各項之和不大于 $\frac{\varepsilon}{2}$。对于如此固定了的 m，可

得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi_{n_q^{(q)}}(x)-\varphi_{n_r^{(r)}}(x)|^p dx \leqslant \int_{-m}^{+m}|\varphi_{n_q^{(q)}}(x)-\varphi_{n_r^{(r)}}(x)|^p dx+\frac{\varepsilon}{2}。$$

由序列(52)在区間 $[-m, +m]$ 上的 L_p 中的收斂性，可知右边的积分对于一切足够大的 q 及 r 不大于 $\frac{\varepsilon}{2}$，所以存在一数 N，使当 q 及 $r \geqslant N$ 时

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi_{n_q^{(q)}}(x)-\varphi_{n_r^{(r)}}(x)|^p dx \leqslant \varepsilon,$$

就是說，序列(52)自收斂，因此[65]它在整个軸上的 L_p 中有依 L_p 的收斂性的極限，这正是所要証的。

注 3. 不难証明，在定理中及在注 2 中所陈述的列緊性条件不仅是充分的，而且对于 L_p 中的列緊性是必要的。

注 4. 可以証明，对于 L_p 中任意函数 $\varphi(x)$，下面的公式成立：

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x+h)-\varphi(x)|^p dx=0。\tag{53}$$

条件(42)归結成下面的要求，即这种和的連續性对于 A 中的一切 $\varphi(x)$ 是一致的。这条件在这种意义下与 [14] 中等度連續性条件是完全相似的。我們証明 (53)。例如設 $\varphi(x) \in$ 有穷区間 $[a, b]$ 上的 L_p，而与上面一样，用零扩展它到 $[a, b]$ 之外。在[61]中曾証明，連續函数的綫性簇在 L_2 中是到处稠密的。同样可以关于 $L_p (p \geqslant 1)$ 証明相似的命題。令 ε 是預定的正数。依剛才所証过的，存在一在 $[a, b]$ 中連續的函数 $f(x)$，使

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)-\varphi(x)|^p dx \leqslant \varepsilon,\tag{54}$$

其中我們設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 之外等于零。由此直接可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+h)-\varphi(x+h)|^p dx \leqslant \varepsilon。\tag{55}$$

把差 $\varphi(x+h)-\varphi(x)$ 表成下面形式：

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=[\varphi(x+h)-f(x+h)]+$$
$$+[f(x)-\varphi(x)]+[f(x+h)-f(x)],$$

应用(54)及(55)以及显然的不等式

$$|a+b+c|^p\leqslant 3^p|a|^p+3^p|b|^p+3^p|c|^p,$$

可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x+h)-\varphi(x)|^p dx\leqslant 2\cdot 3^p\cdot\varepsilon+\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|^p dx。$$

如果，比方說 h 是正的，那末最后积分可以写成形式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|^p dx=$$
$$=\int_a^{b-h}|f(x+h)-f(x)|^p dx+\int_{b-h}^{b}|f(x)|^p dx,$$

而显然它与 h 一同趋向于零，所以对于一切足够接近零的 h，它一定 $\leqslant\varepsilon$。如此对于一切足够接近于零的 h，可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x+h)-\varphi(x)|^p dx\leqslant(2\cdot 3^p+1)\varepsilon,$$

由此，既然 ε 是任意的，可得(53)。